Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. M. Fuchs
Dominik Schillo, M.Sc.

Minimalflächen (WiSe 2016/17)
Blatt 6

Ziel dieses Übungsblatts ist es, die Existenz einer konformen Lösung $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ des Systems

$$\Delta X = 2HX_u \times X_v \tag{1}$$

mt $H \in \mathbb{R}$ zu finden. Nach den Bemerkungen zu Lemma 3.1 beschreibt X dann eine Fläche mit mittlerer Krümmung H. Mit Methoden der Variationsrechnung (Existenztheorie im Sobolevraum und anschließende Regularitätstheorie) lässt sich die Existenz einer Minimalfläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ der Klasse C^2 des Energiefunktionals

$$\begin{aligned} E(X) &:= D(X) + 4HV(X) \quad \text{mit} \\ D(X) &:= \int\limits_\Omega \{|X_u|^2 + |X_v|^2\} dudv \quad \text{und} \\ V(X) &:= \frac{1}{3} \int\limits_\Omega X \cdot (X_u \times X_v) dudv \end{aligned}$$

zeigen (D.h. $E(X) \leq E(Y)$ für alle $Y : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $X = Y$ nahe $\partial\Omega$).

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass das E-Minimum X Lösung von (1) ist. Benutzen Sie dabei, dass für $X_\varepsilon := X + \varepsilon\varphi$ mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\frac{d}{d\varepsilon} E(X_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0$$

ist. Verwenden Sie außerdem die Gleichung

$$(u \times v) \cdot w = \det(u, v, w)$$

für Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass das Minimum schwach konform ist (d.h. es gilt $|X_u|^2 = |X_v|^2$ und $X_u \cdot X_v = 0$, aber es sind Nullstellen von X_u und X_v möglich). Dazu betrachtet man die innere Variation: Es sei $\lambda \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. Wir betrachten für ein kleines $\varepsilon > 0$

$$h_\varepsilon(z) := z - \varepsilon\lambda(z) + o(\varepsilon).$$

Durch geeignete Wahl der Ausdrücke in $o(\varepsilon)$ kann für genügend kleines ε erreicht werden, dass h_ε ein Diffeomorphismus mit $h_\varepsilon = \mathrm{id}$ auf $\partial\Omega$ ist. Betrachten Sie daher die Vergleichsfunktion $\widetilde{X}_\varepsilon := X \circ h_\varepsilon^{-1}$ (beachte $h_\varepsilon(\Omega) = \Omega$ für $\varepsilon \ll 1$). Zeigen Sie

(a) $V(\widetilde{X}_\varepsilon)$ ist unabhängig von ε.

(b) Mit Hilfe der Formel $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ für Matrizen mit $\|A\| < 1$ gilt

$$\frac{d}{d\varepsilon} D(\widetilde{X}_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_\Omega \{2X_u \cdot X_v(\lambda_v^1 + \lambda_u^2) + (|X_u|^2 - |X_v|^2)(\lambda_u^1 - \lambda_v^2)\} dx$$

(c) Folgern Sie daraus die Behauptung.

Abgabe: Keine.