Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
PD Dr. Yana Kinderknecht
WiSe 2018 / 19

Operatorhalbgruppen, Markovsche Prozesse und Evolutionsgleichungen

Übungsblatt 1 (14 Punkte)

Abgabe: Vor der Vorlesung, 25.10.2018.

Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) *(2 Punkte)* Sei L ein beschrankter linearer Operator auf einem Banachraum X und $T(t) = e^{tL} := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L^n$. Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t \geq 0}$ eine normstetige Halbgruppe ist.

b) *(2 Punkte)* Seien A und B zwei kommutierende (d.h. $AB = BA$) beschränkte lineare Operatoren auf einem Banachraum X. Zeigen Sie, dass $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Sei $(T(t))_{t \geq 0}$ eine normstetige Halbgruppe auf einem Banachraum X. Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t \geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe ist.

Aufgabe 3. (7 Punkte)

Sei $(T(t))_{t \geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf einem Banachraum X. Sei $(L, \mathrm{Dom}(L))$ ihr Erzeuger.

a) *(2 Punkte)* Sei Y ein anderer Banachraum und V ein Isomorphismus von Y nach X. Zeigen Sie, dass die Familie $(S(t))_{t \geq 0}$, die durch $S(t) := V^{-1} T(t) V$, $t \geq 0$, definiert wird, eine stark stetige Halbgruppe auf Y ist. Finden Sie ihr Erzeuger.

b) *(2 Punkte)* Für gegebene Zahlen $m \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$ zeigen Sie, dass die Familie $(S(t))_{t \geq 0}$, die durch $S(t) := e^{mt} T(\alpha t)$, $t \geq 0$, definiert wird, eine stark stetige Halbgruppe auf X ist. Finden Sie ihr Erzeuger.

c) *(3 Punkte)* Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ noch eine stark stetige Halbgruppe auf X, die mit $(T(t))_{t \geq 0}$ kommutiert, d.h. $S(t)T(t) = T(t)S(t)$ für alle $t \geq 0$. Sei $(A, \mathrm{Dom}(A))$ der Erzeuger von $(S(t))_{t \geq 0}$. Zeigen Sie, dass die Familie $(U(t))_{t \geq 0}$, die durch $U(t) := S(t)T(t)$ definiert wird, eine stark stetige Halbgruppe auf X ist. Finden Sie ihr Erzeuger.

Die Übungsblätter sind auf unserer Homepage erhältlich:
https://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/OHGMPEG/2018_index.html