Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2018/2019)
Blatt 1

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 5.11.2018.

Aufgabe 1.

Seien die Funktionen $u, v, w : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y, \quad v(x,y) = \log(x^2+y^2), \quad w(x,y) = x^2 - y^2.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen u, v, w sowie $u+v+w$ die Laplace Gleichung lösen.

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie je eine nichtkonstante Lösung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu folgenden partiellen Differentialgleichungen.

$$\text{(i) } u_{xy} - u_{yx} = 0, \quad \text{(ii) } u_x - u_y = 0.$$

Aufgabe 3.

a) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0\}$ offen und $u \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass nach Transformation von Ω mittels Polarkoordinaten $\Phi : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $(r,\theta) \mapsto (x,y) = \Phi(r,\theta)$ die Formel

$$\Delta u(x,y) = \frac{w_{\theta\theta}(r,\theta)}{r^2} + \frac{w_r(r,\theta)}{r} + w_{rr}(r,\theta) \quad \text{für alle} \quad (x,y) \in \Omega$$

gilt, wobei $w(r,\theta) := u(\Phi(r,\theta)) = u(x,y)$ ist.

b) Finden Sie alle *radialsymmetrische* Lösungen der Laplace Gleichung in Ω.

[Eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *radialsymmetrisch*, falls es eine Funktion $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = w(r)$ für $r = |x|$ und $x = (x_1, \ldots, x_n)$ gibt.]

c) Für radialsymmetrische Funktionen $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $n > 2$ lässt sich der Laplace Operator als

$$\Delta u = w_{rr} + \frac{n-1}{r} w_r$$

umschreiben. Zeigen Sie, dass die Funktion $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ für $n > 2$ mit

$$u(x) := c_0 + \frac{c_1}{2-n} |x|^{2-n}$$

die Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ löst.

Aufgabe 4.

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ eine in Ω *komplex differenzierbare* Funktion, d.h. es existiert

$$f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

für alle $z \in \Omega$.

a) Zeigen Sie, dass f im reellen Sinn (aufgefasst als Abbildung $\mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^2$) total differenzierbar in Ω ist und die *Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen*

$$u_x(z) = v_y(z), \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

für alle $z = x + iy \in \Omega$ gelten.

b) Seien die zweiten partiellen Ableitungen von u und v existent und stetig in Ω. Beweisen Sie, dass dann u und v harmonisch in Ω sind.