Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2018/2019)
Blatt 6

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 10.12.2018.

Aufgabe 1.

Seien $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $h : B_1(0) \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x,y) = \operatorname{Im} \frac{1}{x-1+\mathrm{i}y}.$$

Zeigen Sie, dass h eine harmonische Funktion ist, die nicht als Poisson Integral darstellbar ist.

[Hinweis: Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{r \nearrow 1} \int_{\partial B_r(0)} |h(z)| \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1(z)$$

nicht existiert und verwenden Sie den Satz 2.3 der Vorlesung.]

Aufgabe 2.

Seien U eine offene und K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $u : U \times K \to \mathbb{R}$ eine stetige und nach $x_1, \dots, x_n$ stetig partiell differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_K u(x,y)\mathrm{d}y = \int_K \frac{\partial}{\partial x_j} u(x,y)\mathrm{d}y, \qquad j = 1, \dots, n$$

gilt.

Aufgabe 3.

Sei $u \in C(\overline{B}_R(x_0))$ harmonisch in $B_R(x_0)$ und nichtnegativ auf $\overline{B}_R(x_0)$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$u(x_0)\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} \;\leq\; u(x) \;\leq\; u(x_0)\left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r}, \qquad x \in \overline{B}_r(x_0)$$

für alle $r < R$ gilt.

[Hinweis: Verwenden Sie die Poissonsche Formel und die Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen.]

Aufgabe 4.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $U \subset \Omega$ eine offene Menge und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion mit $u(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in U$. Zeigen Sie, dass $u(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \Omega$ gilt.

[Hinweis: Betrachten Sie die holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f = u_x - \mathrm{i}u_y$ und folgern Sie mithilfe des *Identitätssatzes* für holomorphe Funktionen, dass f konstant ist.]

Aufgabe 5.

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\{u_k\}$ eine Folge von Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften.

- u_k ist harmonisch in Ω für alle k.
- $\{u_k\}$ ist gleichmäßig konvergent auf $\overline{B}_r(x_0)$ für alle $x_0 \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$.

Zeigen Sie, dass der punktweise Grenzwert $\lim_{k\to\infty} u_k$ harmonisch in Ω ist.

[Hinweis: Verwenden Sie die Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen.]