Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2018/2019)
Blatt 7

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 17.12.2018.

Aufgabe 1.

Seien $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein *spiegelsymmetrisches* Gebiet, d. h. es gilt $\Omega^* = \Omega$, und $h : \Omega \cap \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie die Folgenden Aussagen.

(i) Ist h eine stetige Funktion auf $\Omega \cap (\mathbb{R}^n_+ \cup \mathbb{R}^n_0)$ und 0 auf $\Omega \cap \mathbb{R}^n_0$, so ist $\bar{h} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{falls } x_n > 0 \\ -h(x^*), & \text{falls } x_n \leq 0 \end{cases}$$

die eindeutig bestimmte harmonische Fortsetzung von h auf ganz Ω.

[Hinweis: Verwenden Sie den Satz 3.1 aus der Vorlesung.]

(ii) Ist h eine C^1-Funktion auf $\Omega \cap (\mathbb{R}^n_+ \cup \mathbb{R}^n_0)$ und $\frac{\partial h}{\partial x_n} = 0$ auf $\Omega \cap \mathbb{R}^n_0$, so ist $\bar{\bar{h}} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\bar{\bar{h}}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{falls } x_n > 0 \\ h(x^*), & \text{falls } x_n \leq 0 \end{cases}$$

die eindeutig bestimmte harmonische Fortsetzung von h auf ganz Ω.

[Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\frac{\partial h}{\partial x_n}$.]

Aufgabe 2.

Seien $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\Gamma \subset \partial\Omega$ ein Stück von $\partial B_R(x)$ für ein $x \in \Omega$ und ein $R > 0$. Ferner sei $h : \Omega \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, die stetig auf $\Omega \cup \Gamma$ ist und für die $h = 0$ auf Γ gilt. Beschreiben Sie, wie sich h über Γ hinaus harmonisch fortsetzen lässt.

[Hinweis: Wählen Sie ein $y \in \partial B_R(x)$ mit $y \notin \Gamma$ und betrachten Sie die Inversion an $\partial B_{2R}(y)$.]

Aufgabe 3.

Seien $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, u, $v \in C^0(\bar{\Omega})$ superharmonische Funktionen und $c > 0$. Zeigen Sie, dass

(i) cu superharmonisch und $-cu$ subharmonisch ist,

(ii) $u + v$ superharmonisch ist,

(iii) $\min\{u, v\}$ superharmonisch.

(iv) falls $u \geq -v$ auf $\partial\Omega$ ist, so ist $u \geq -v$ in Ω.

Aufgabe 4.

Seien $n \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und u, $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Funktionen, die die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f_1, & -\Delta v &= f_2, & & x \in \Omega, \\ u &= g_1, & v &= g_2, & & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

erfüllen, wobei f_1, f_2, g_1, g_2 stetige Funktionen mit

$$f_1 \leq f_2, \qquad g_1 \leq g_2$$

sind. Zeigen Sie, dass $u \leq v$ auf $\overline{\Omega}$ gilt.