Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2018/2019)
Blatt 8

Abgabe: vor der Vorlesung am **Montag, 14.1.2019**.

Aufgabe 1.

Sei $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ eine subharmonische Funktion mit $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) \leq 0$. Zeigen Sie, dass $u \leq 0$ in $\mathbb{R}^n$ gilt.

[Hinweis: Betrachten Sie eine Folge $\{x_m\}$ mit $u(x_m) \to \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)$ für $m \to \infty$ und benutzen Sie das Maximumprinzip für subharmonische Funktionen.]

Aufgabe 2.

Seien Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $u \in C^0(\Omega)$ eine subharmonische Funktion und $B \Subset \Omega$ eine offene Kugel. Zeigen Sie, dass der *Perron-Projektor* (oder *harmonische Lift*) U von u mit

$$U(x) = \begin{cases} \text{Poisson Integral von } u \text{ auf } B, \\ u \quad \text{auf } \Omega - B \end{cases}$$

subharmonisch auf Ω ist.

Aufgabe 3.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $w = w_{x_0}$ eine *lokale Barriere* in einem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$. Zeigen Sie, dass es in x_0 eine *globale Barriere* gibt.

[Hinweis: Sei $B_r(x_0)$ eine Kugel, sodass w bezüglich $B_r(x_0)$ eine globale Barriere ist. Betrachten Sie die Funktion $\widetilde{w} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$\widetilde{w}(x) = \begin{cases} \min\{w(x), \gamma\}, & x \in \overline{\Omega} \cap B_{r/2}(x_0), \\ \gamma, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei $\gamma := \inf\{w(x) : x \in \overline{\Omega} \cap \overline{A}_r(x_0)\} > 0$ mit $A_r(x_0) = B_r(x_0) - \overline{B}_{r/2}(x_0)$ ist.]

Aufgabe 4.

Es Erfülle Ω in $x_0 \in \partial\Omega$ eine äußere Kugelbedingung. Zeigen Sie, dass x_0 regulär bezüglich Δ ist.