<u>Satz 2.3:</u> Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $u_i \longrightarrow u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ gleichwertig mit

$$\int_\Omega \partial^\alpha u_i \, f \, dx \xrightarrow[i\to\infty]{} \int_\Omega \partial^\alpha u \, f \, dx$$

für alle $|\alpha| \leq k$ und $f \in L^{p'}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

$\square$

Sei $\{u_i\}$ Folge in $W^{k,p}(\Omega)$, die in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ schwach konvergiert, d.h. es gibt $U \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit

$$(\partial^\alpha u_i)_{|\alpha| \leq k} \longrightarrow U \quad \text{in } L^p(\Omega, \mathbb{R}^m), \quad i \to \infty.$$

Hahn-Banach (Trennungssatz)

$W^{k,p}(\Omega)$ ist normabgeschlossen und damit auch schwach abgeschlossen, es folgt $U = (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}$ für ein $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

<u>Das hat folgende Konsequenz:</u> sei $1 < p < \infty$ und

$$\sup_i \|u_i\|_{k,p} < \infty.$$

Dann ist $(\partial_\alpha u_i)_{|\alpha| \leq k}$ beschränkt in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$, nach dem schwachen Auswahlprinzip findet man $U \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und eine Teilfolge $\{u_i'\}$ mit $(\partial_\alpha u_i')_{|\alpha| \leq k} \rightharpoonup U$ in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

U gehört aber gemäß obiger Bem. zu $W^{k,p}(\Omega)$, und die Teilfolge konvergiert schwach in $W^{k,p}(\Omega)$ gegen die Funktion u mit $U = (\partial_\alpha u)_{|\alpha| \le k}$.

$\Longrightarrow$

Satz 2.4: Für $1 < p < \infty$ gilt in $W^{k,p}(\Omega)$ das schwache Auswahlprinzip, d.h. normbeschränkte Folgen haben schwach konvergente Teilfolgen.

(wichtig für die Variationsrechnung!)

Bemerkungen: 1) Für $1 < p < \infty$ ist $W^{k,p}(\Omega)$ reflexiv. Das gilt nicht für die Grenzfälle $p = 1, \infty$. Dort versagt auch das schwache Auswahlprinzip.

2) $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ ist normabgeschlossen in $W^{k,p}(\Omega)$ und somit schwach abgeschlossen, d.h. aus

$$u_\ell \to u \quad \text{in } W^{k,p}(\Omega)$$

mit $u_\ell \in \mathring{W}^{k,p}(\Omega)$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$, folgt $u \in \mathring{W}^{k,p}(\Omega)$. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ " ~~[illegible]~~ " ~~[illegible]~~.

§ 3 Glättungsoperatoren, Approximationssätze für Sobolev-Funktionen

Für viele Zwecke, z.B. für den Beweis von Rechenregeln, ist es nützlich, Sobolev-Funktionen durch unendlich oft differenzierbare Funktionen zu approximieren. Wir werden hier ein sehr allgemeines Approximationsschema beschreiben und zum Schluß dieses Paragraphen die zentrale Aussage gewinnen, daß für $p < \infty$ der Sobolev-Raum $W^{k,p}(\Omega)$ genau der Abschluß von $C^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ ist.

DEFINITION: Ein Mollifier (glättender Kern) auf $\mathbb{R}^n$ ist eine C^∞-Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ mit $\operatorname{spt} \varphi \subset \overline{B_1(0)}$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx = 1$. Es sei für $\varepsilon > 0$ $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$.

Ein Beispiel ist

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 \\ c \cdot \exp\left(1/|x|^2 - 1\right), & |x| < 1, \end{cases}$$

wobei $c = c_n$ so gewählt ist, daß $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx = 1$ ausfällt.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varepsilon > 0$, $\Omega_{(\varepsilon)} := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ die innere Parallelmenge zu Ω im Abstand ε.

DEFINITION: Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Die Glättung $f_\varepsilon : \Omega_{(\varepsilon)} \to \mathbb{R}$ von f mit Radius ε ist die Faltung

$$f_\varepsilon(x) := f * \varphi_\varepsilon(x) := \int_\Omega \varphi_\varepsilon(y-x) f(y) \, dy.$$

Dabei braucht das in der Definition auftretende Integral nur über den Bereich $B_\varepsilon(x)$ erstreckt zu werden, ist also wegen der lokalen Integrierbarkeit von f über Ω wohldefiniert und endlich. Die Faltung $f_\varepsilon(x)$ ist anschaulich der Mittelwert von f über die Kugel $B_\varepsilon(x)$ versehen mit der Gewichtsfunktion φ_ε. Es gilt (nach dem allgemeinen Prinzip der Differentiation von parameterabhängigen Integralen), daß ein Faltungsprodukt $g * h$ stets so regulär ist, wie es der besser Faktor erlaubt.

Speziell gilt hier:

LEMMA A: Für $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ gehört $J_\varepsilon(f) := \varphi_\varepsilon * f$ zur Klasse $C^\infty(\Omega_{(\varepsilon)})$; ist $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und existiert die schwache Ableitung $D^\alpha f$, so gilt die folgende Vertauschungsregel

$$\boxed{\partial^\alpha (J_\varepsilon f) = J_\varepsilon (D^\alpha f)} \text{ auf } \Omega_{(\varepsilon)}.$$

d.h. Glättung vertauscht mit schwacher Ableitung.

Beweis: Für jeden Multiindex $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ ist (hier: $D^\beta = \partial^\beta$, da alles klassisch diff'bar)

$$D^\beta J_\varepsilon(f)(x) = D^\beta \int_\Omega \varphi_\varepsilon(y-x)\, f(y)\, dy =$$

$$\int_\Omega D_x^\beta \left(\varphi_\varepsilon(y-x)\right) f(y)\, dy = (-1)^{|\beta|} \int \left(D_\beta \varphi_\varepsilon\right)(y-x)\, f(y)\, dy,$$

und das Integral auf der rechten Seite macht Sinn. $\Longrightarrow J_\varepsilon(f) \in C^\infty(\Omega_{(\varepsilon)})$.

Zum Beweis der 2^{ten} Aussage beachtet man, daß

$$\Psi: y \mapsto \varphi_\varepsilon(y-x)$$

für festes $x \in \Omega_{(\varepsilon)}$ eine Testfunktion mit kompaktem Träger in Ω ist, d.h.

$$\int_\Omega D^\alpha \Psi(y)\, f(y)\, dy \overset{D^\alpha f \text{ existiert}}{=} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \Psi(y)\, D^\alpha f(y)\, dy \overset{\text{Def von } J_\varepsilon}{=} (-1)^{|\alpha|} J_\varepsilon (D^\alpha f)(x)$$

Andrerseits ist wie vorhin gesehen

$$\int_\Omega D^\alpha \Psi(y)\, f(y)\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial_x^\alpha \{ J_\varepsilon(y-x) \}\, f(y)\, dy = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(J_\varepsilon(f) \right)$$

Wichtiger ist der folgende

SATZ 3.1: (Erhaltung von Normen bei Glättungsprozessen)

Sei Ω offen in $\mathbb{R}^n$, $K \subset \Omega$ kompakt und $\varepsilon > 0$ so klein, daß die äußere Parallelmenge

$$\mathbf{K_\varepsilon} := \{ x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon \}$$

kompakten Abschluß in Ω hat. Für $\mathbf{u}: \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar gilt:

i) $$\left.\begin{aligned} \sup_K J_\varepsilon u &\le \operatorname{ess\,sup}_{K_\varepsilon} u \\ \inf_K J_\varepsilon u &\ge \operatorname{ess\,inf}_{K_\varepsilon} u \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \| J_\varepsilon u \|_{L^\infty(K)} \le \| u \|_{L^\infty(K_\varepsilon)}.$$

ii) $\| J_\varepsilon u \|_{L^p(K)} \le \| u \|_{L^p(K_\varepsilon)}$, $1 \le p \le \infty$.

iii) $\| J_\varepsilon u \|_{W^{k,p}(\Omega_{(\varepsilon)})} \le \| u \|_{W^{k,p}(\Omega)}$, falls $u \in W^{k,p}(\Omega)$

iv) $\| J_\varepsilon u \|_{C^k(\Omega_{(\varepsilon)})} \le \| u \|_{C^k(\Omega)}$, falls $u \in C^k(\Omega)$.

v) Ist $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ für ein $0 < \alpha \leq 1$, so liegt $J_\varepsilon(u)$ in $C^{0,\alpha}(\Omega_{(\varepsilon)})$ mit Hölder-Konstante kontrolliert durch die entsprechende Größe von u auf Ω.

<u>Bemerkung:</u> Die Norm auf $C^k(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist

$$\| f \|_{C^k(D)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(D)} .$$

Beweis: i) Für $x \in K$ ist per Definition

$$J_\varepsilon u(x) = \int \varphi_\varepsilon(y-x)\, u(y)\, dy \leq \quad (\text{weil } \varphi_\varepsilon \geq 0)$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{K_\varepsilon} u \cdot \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi_\varepsilon(y-x)\, dy ,$$

wobei berücksichtigt wird, daß $\varphi_\varepsilon(y-x)$ Träger in $\overline{B_\varepsilon}(x)$ hat. Nach dem Transformationssatz hat das Integral den Wert 1, daraus folgt die erste Ungleichung aus i), die andere beweist man analog.

iv) folgt aus i) gemäß $D^\alpha(J_\varepsilon u) = J_\varepsilon(D^\alpha u)$

iii) folgt aus iv), da Glättung auch mit der <u>schwachen</u> Ableitung vertauscht

ii) Der Fall $p = \infty$ ist in i) enthalten. Sei zunächst $p = 1$. Dann ist

$$\| J_\varepsilon u \|_{L^1(K)} = \int_K \left| \int_{K_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(y-x)\, u(y)\, dy \right| dx \leq$$

$$\leq \int_K \left(\int_{K_\varepsilon} |u(y)| \cdot \varphi_\varepsilon(y-x)\, dy \right) dx \qquad \text{(nach Fubini)}$$

$$= \int_{K_\varepsilon} \left(\int_K \varphi_\varepsilon(y-x)\, dx \right) |u(y)| \cdot dy$$

$$= \int_{K_\varepsilon} \underbrace{\left(\int_{K \cap B_\varepsilon(y)} \varphi_\varepsilon(y-x)\, dx \right)}_{\leq 1} |u(y)|\, dy \leq \int_{K_\varepsilon} |u|\, dy .$$

Im Fall $1 < p < \infty$ argumentiert man so: Es gilt

$$\| J_\varepsilon u \|^p_{L^p(K)} = \int_K \left| \int_{K_\varepsilon} u(y)\, \varphi_\varepsilon(y-x)\, dy \right|^p dx =$$

$$\int_K \left| \int_{K_\varepsilon} u(y)\, d\mu_x(y) \right|^p dx,$$

wenn

$$\mu_x := \mathcal{L}^n \llcorner \left(\text{Gewichtsfunktion } y \longmapsto \varphi_\varepsilon(y-x) \right)$$

bezeichnet. Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nach der Hölder-Ungleichung ist

$$\int_{K_\varepsilon} |u(y)|\, d\mu_x(y) \leq \left(\int_{K_\varepsilon} |u|^p\, d\mu_x \right)^{1/p} \cdot \mu_x(K_\varepsilon)^{1/q},$$

also:

$$\int_K \left| \int_{K_\varepsilon} u(y)\, d\mu_x(y) \right|^p dx \leq \int_K \left(\int_{K_\varepsilon} |u|^p(y)\, d\mu_x(y) \right) \cdot \mu_x(K_\varepsilon)^{p/q}\, dx$$

mit

$$\mu_x(K_\varepsilon) = \int_{K_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(y-x)\, dy = 1,$$

so daß die Abschätzung (beachte Def. von μ_x!)

$$\| J_\varepsilon u \|^p_{L^p(K)} \le \int_K \left(\int_{K_\varepsilon} |u(y)|^p \, \varrho_\varepsilon(y-x) \, dy \right) dx$$

folgt. Nun vertauscht man rechts mit Fubini die Integrationsbereiche und kommt wie im Fall $p = 1$ zum Ziel.

v) Seien $x, \tilde{x} \in \Omega_{(\varepsilon)}$. Dann ist

$$| J_\varepsilon u(x) - J_\varepsilon u(\tilde{x}) | = \left| \int_\Omega u(y)\, \varrho_\varepsilon(y-x)\, dy - \int_\Omega u(y)\, \varrho_\varepsilon(y-\tilde{x})\, dy \right|$$

$$= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} u(y)\, \varrho_\varepsilon(y-x)\, dy - \int_{B_\varepsilon(\tilde{x})} \varrho_\varepsilon(y-\tilde{x})\, u(y)\, dy \right|$$

Transf.

$$= \left| \int_{B_\varepsilon(0)} u(y+x)\, \varrho_\varepsilon(y)\, dy - \int_{B_\varepsilon(0)} \varrho_\varepsilon(y)\, u(y+\tilde{x})\, dy \right|$$

$$\le \int_{B_\varepsilon(0)} \varrho_\varepsilon(y)\, | u(y+x) - u(y+\tilde{x}) |\, dy$$

$$\le C \cdot |x-\tilde{x}|^\alpha \cdot \int_{B_\varepsilon(0)} \varrho_\varepsilon\, dy = C \cdot |x-\tilde{x}|^\alpha ,$$

wenn C die Hölder-Konstante von u auf Ω ist. ∎

Der gerade bewiesene Satz besagt im wesentlichen, daß der lineare Glättungsoperator

$$J_\varepsilon : X(\Omega) \longrightarrow X(\Omega_{(\varepsilon)}) ,$$

der einen Raum von Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$ in den entsprechenden normierten Raum von Funktionen $\Omega_{(\varepsilon)} \to \mathbb{R}$ abbildet, für alle gängigen Räume $X(\dots)$ eine schwache Kontraktion darstellt. Darüberhinaus bildet J_ε in die Unter-räume