Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II (SoSe 2019)
Blatt 2

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 13.05.2019.

Aufgabe 1

Seien H ein Hilbertraum, X ein echter abgeschlossener Unterraum von H und $f_0 \in X^*$. Zeigen Sie, dass es ein $f \in H^*$ mit $f|_X = f_0$ und $\|f\| = \|f_0\|$ gibt.

[Hinweis: Verwenden Sie folgenden Satz. Sei H ein Hilbertraum. Zu jedem $T \in H^*$ gibt es ein eindeutiges Element $x_T \in H$, so dass $T(x) = \langle x, x_T \rangle$ für alle $x \in H$.]

Aufgabe 2

a) Sei Y ein Unterraum eines normierten Raums X. Zeigen Sie: Für jedes $x \in X$ gilt

$$\operatorname{dist}(x, Y) := \inf_{y \in Y} \|x - y\| \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x \in \overline{Y}$ ist.

b) Sei Y ein echter, abgeschlossener Unterraum eines normierten Raums X. Beweisen Sie, dass es zu jedem $\theta \in (0, 1)$ einen Vektor x_θ in X mit $\|x_\theta\| = 1$ und

$$\|y - x_\theta\| \geq \theta \qquad \text{für alle } y \in Y$$

gibt.

c) Der normierte Raum X habe die Eigenschaft, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B}_1(0)$ folgenkompakt ist. Zeigen Sie, dass X endlichdimensional ist.

Aufgabe 3

a) Sei S eine nichtleere Teilmenge des Skalarproduktraumes X. Zeigen Sie:

(i) $S^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von X,

(ii) $S^\perp = \overline{S}^\perp = \langle S \rangle^\perp = \overline{\langle S \rangle}^\perp$.

b) Sei K ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraumes X. Beweisen Sie den *Projektionssatz*:

(i) Zu jedem $x \in X$ gibt es eine eindeutige Punkt $k_x \in K$ mit $\|x - k_x\| = \operatorname{dist}(x, K)$.

(ii) k_x ist der eindeutige Punkt in K mit $x - k_x \in K^{\perp}$,

(iii) $X = K \oplus K^{\perp}$,

(iv) $x \mapsto k_x$ definiert eine idempotente, lineare Abbildung mit $K = \operatorname{Im} P$ und $K^{\perp} = \ker P$.

c) Sei M ein Unterraum eines Hilbertraums X. Beweisen Sie, dass $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$ ist.

d) Sei S eine Teilmenge eines Hilbertraumes X. Beweisen Sie, dass $\langle S \rangle$ genau dann dicht in X ist, wenn $S^{\perp} = \{0\}$ ist.