Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II (SoSe 2019)
Blatt 4

Abgabe: vor der Vorlesung am Mittwoch, 29.05.2019.

Aufgabe 1

Seien Ω eine nichtleere, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die α-te schwache Ableitung einer Funktion $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ist eindeutig, sofern sie existiert.

b) Falls $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ eine klassische stetige α-te Ableitung besitzt, so hat sie eine schwache α-te Ableitung und die beiden Ableitungen stimmen miteinander überein.

c) Es besitze $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ die schwache Ableitung $D^\alpha u$ und $D^\alpha u$ besitze die schwache Ableitung $D^\beta(D^\alpha u)$. Dann besitzt u die schwache Ableitung $D^{\alpha+\beta}u$ und es gilt $D^{\alpha+\beta}u = D^\beta(D^\alpha u)$.

d) Versehen mit der Norm
$$\|u\|_m := \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_1$$
ist $W^m(\Omega)$ ein Banachraum.

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $u(x) = |x|$, so ist $u \in W^1(-1,1)$.

b) Sei $v(x) = \operatorname{sgn}(x)$, so ist $v \notin W^1(-1,1)$.

c) Seien B die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und $u_\gamma(x) = |x|^{-\gamma}$. Dann ist $u_\gamma \in W^k(B)$ genau dann, wenn $k + \alpha < n$ gilt.

d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$, d. h. zu $u \in L^p(\Omega)$ gibt es eine Folge $v_m \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $||u - v_m||_p \to 0$.

Aufgabe 3

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Es bezeichne $< \Delta u, \cdot >$ den *distributionellen Laplace-Operator* von u auf Ω, i.e.:

$$< \Delta u, \eta > := \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} u \partial_k^2 \eta dx$$

für jedes $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$. Analog sei mit $< \operatorname{div} u, \cdot >$ die *distributionelle Divergenz* bezeichnet. Zeigen Sie:

i) Ist $u \in W^1(\Omega)$, so ist $< \Delta u, \cdot > = < \operatorname{div} \nabla u, \cdot >$.

ii) Ist $u \in W^2(\Omega)$, so stimmt $< \Delta u, \cdot >$ mit dem schwachen Laplace-Operator von u überein.