Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II (SoSe 2019)
Blatt 5

Abgabe: vor der Vorlesung am Mittwoch, 05.06.2019.

Aufgabe 1

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\gamma \in \{1, \dots, d\}$ und $u, w \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent sind.

i) w ist die γ–te schwache (partielle) Ableitung von u auf Ω, also $w = \partial_\gamma u$.

ii) Es gibt eine Folge $(u_n) \subset C^\infty(\Omega)$ mit
$$u_n \xrightarrow{n} u \quad \text{und} \quad \partial_\gamma u_n \xrightarrow{n} w \text{ in } L^1_{loc}(\Omega).$$

iii) Für $0 < |h| \ll 1$ ist $\Delta^h_\gamma u$ $\mathcal{L}^d$–f. ü. in Ω definiert und es strebt
$$\Delta^h_\gamma u \xrightarrow{h \to 0} w \text{ in } L^1_{loc}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass die Bedingungen iii), ii) hinreichend für i) sind.

Aufgabe 2

i) Zeigen Sie, dass die Funktion
$$u : (-1,1) \ni x \mapsto \begin{cases} x^b \sin(x^{-1}), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ u(-x), & x < 0, \end{cases}$$
mit $b \in (1,2)$ ein Element von $\mathrm{AC}(-1,1)$ ist.

[Hinweis: Verwenden Sie das folgende Ergebnis. Sei $v : I \to \mathbb{R}$ stetig und v' existiert bis auf abzählbar viele Ausnahmepunkte mit $v' \in L^1_{loc}(I)$. Dann ist $v \in \mathrm{AC}(I)$.]

ii) Zeigen Sie, dass die Funktion
$$u : (-1,1) \ni x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(x^{-2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
kein Element von $\mathrm{AC}(-1,1)$ ist.

iii) Konstruieren Sie eine Funktion $u : [0,1] \to [0,1]$, die stetig, monoton wachsend sowie surjektiv ist und deren Ableitung 0 $\mathcal{L}^1$– f. ü. ist.