Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II (SoSe 2019)
Blatt 6

Abgabe: vor der Vorlesung am Mittwoch, 12.06.2019.

Aufgabe 1

Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1, 0 < y < 1\}$. Zeigen Sie, dass $C^1(\bar{\Omega})$ nicht dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ für $p \in (1,\infty)$ ist, indem Sie die Funktion

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,0),\ y \in (0,1), \\ 1, & x \in (0,1),\ y \in (0,1) \end{cases}$$

betrachten.

Aufgabe 2

Es seien Ω eine nichtleere, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

i) Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ und p, $q \in [1,\infty)$ mit $p < q$. Falls Ω beschränkt ist, ist $W^{m,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$.

ii) Es seien m, $n \in \mathbb{N}_0$ mit $m > n$ und $p \in [1,\infty)$. Dann gilt $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{n,p}(\Omega)$.

Aufgabe 3

Seien Ω eine nichtleere, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ fixiert. Für

$$D := \sharp\big\{\gamma \in \mathbb{N}_0^d;\ |\gamma| \leq k\big\}$$

definieren wir eine Einbettung $\Phi : W^{k,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)^D$ durch

$$\Phi u := \big(\partial^\gamma u\big)_{|\gamma| \leq k},$$

wobei $\big(\partial^\gamma u\big)_{|\gamma|\leq k}$ o. E. in Zeilenform angeordnet sei. Zeigen Sie, dass die durch Φ definierte Einbettung $\Phi : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)^D$ eine lineare Isometrie und der Unterraum $W^{k,p}(\Omega)$ abgeschlossen in $L^p(\Omega)^D$ ist.

Aufgabe 4

Seien Ω eine nichtleere, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$ und $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$. Zeigen Sie

$$u_m \overset{m}{\rightharpoonup} u \text{ in } W^{k,p}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \partial^\gamma u_m \overset{m}{\rightharpoonup} \partial^\gamma u \text{ in } L^p(\Omega) \text{ für alle } |\gamma| \le k.$$

[Hinweis: Per Definition bedeutet $u_m \overset{m}{\rightharpoonup} u$ für eine Funktion $u \in W^{k,p}(\Omega)$, dass

$$\varphi(u_m) \overset{m}{\longrightarrow} \varphi(u) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in W^{k,p}(\Omega)^*$$

strebt.]

Aufgabe 5

Es seien $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in (1, \infty)$.

a) Es sei $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ und $v \in W^{m,p}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $uv \in W^{m,p}(\Omega)$ mit

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \le \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v, \qquad |\alpha| \le m$$

ist. [Hier bedeutet $\beta \le \alpha$, dass $\beta_j \le \alpha_j$ für $j = 1, \ldots, n$ ist, und

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}.]$$

b) Nun habe Ω einen Lipschitz-Rand und m, p erfüllen die Bedingung $mp > n$. Zeigen Sie: Das Produkt uv zweier Funktionen $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$ liegt ebenfalls in $W^{m,p}(\Omega)$ mit

$$\|uv\|_{m,p} \le K \|u\|_{m,p} \|v\|_{m,p},$$

wobei $K > 0$ eine Konstante ist, die nicht von u und v abhängt.

[Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass

$$\|D^\alpha(uv)\|_p \le K_\alpha \|u\|_{m,p} \|v\|_{m,p}, \qquad |\alpha| \le m$$

für alle $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ und $v \in W^{m,p}(\Omega)$.]