Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II (SoSe 2019) Blatt 9

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 08.07.2019.

Aufgabe 1

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $1 \leq p \leq \infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i) Seien $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$. Dann ist $\varphi \circ u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$ und es gilt:

$$\partial_\gamma(\varphi \circ u) = \varphi'(u)\,\partial_\gamma u \quad \text{f. ü. in } \Omega$$

und für alle $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$.

ii) Sei $u \in W^1(\Omega)$. Dann ist $u^+, u^-, |u| \in W^1(\Omega)$ mit

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{für} \quad u > 0 \\ 0 & \text{für} \quad u \leq 0 \end{cases},$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad u \geq 0 \\ \nabla u & \text{für} \quad u < 0 \end{cases},$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u & \text{für} \quad u > 0 \\ 0 & \text{für} \quad u = 0 \\ -\nabla u & \text{für} \quad u < 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Zeigen Sie, dass für $p < d$ die Einbettung

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$$

stetig ist, d. h. es gibt eine Konstante $c(d,p) > 0$ mit

$$\|u\|_{\frac{dp}{d-p}} \leq c(d,p)\,\|\nabla u\|$$

für alle $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$.