Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Yana Kinderknecht

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2013/2014)
Blatt 2 (16 Punkte)

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 04.11.2013.

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem ($\circledast$) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Berechnen Sie zu gegebenem Vektorfeld F und gegebenem Gebiet Ω den sogenannten *Fluss des Vektorfeldes F durch die abgeschlossene Oberfläche $\partial\Omega$*, d.h. das Randintegral $\int\limits_{\partial\Omega} F \cdot \mathcal{N}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$. Darin bezeichnen $\mathcal{H}^{n-1}$ das $(n-1)$-dimensionale *Hausdorff-Maß* (Oberflächenmaß) und $\mathcal{N}$ das äußere Einheitsnormalenfeld an $\partial\Omega$.

a) **(1 Punkt)** $F = (y, -x, 0)$ und $\Omega = B_R(0) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

b) **(1 Punkt)** $F = (-x^3 y, xy^3, \sqrt[3]{x^3 y + xy^3})$ und Ω ist durch das System der Ungleichungen $z^2 \geq x^2 + y^2$, $5 - z \geq x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ gegeben. *Hinweis*: Satz von Gauß.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}) := \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}} |u(x)| dx < \infty\}$. Die Funktion $\widehat{f} : \quad \widehat{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx$ heißt die *Fouriertransformation* der Funktion f. Die Funktion $\widehat{f}$ ist auf $\mathbb{R}$ wohldefiniert, stetig und beschränkt, weil für alle $y \in \mathbb{R}$ die Abschätzungen $\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-ixy}|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$ gelten. Die Funktion $\widetilde{f} : \quad \widetilde{f}(y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{ixy} dx$ heißt die *inverse Fouriertransformation* der Funktion f. In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$, wo f differenzierbar ist, gilt die Formel der Inversion: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{ixy} dx$ d.h. $f(x) = \widetilde{\left(\widehat{f}\right)}(x)$.

a) **(1 Punkt)** Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ linear ist und die Formel $\widehat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \widetilde{f}(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

b) **(1 Punkt)** Sei $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ die Formel $\widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y)$ gilt.

c) **(1 Punkt)** Sei $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, wobei $g(x) := xf(x)$. Zeigen Sie, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ die Formel $\widehat{(-ig)}(y) = \left(\widehat{f}\right)'(y) := \frac{d}{dy} \widehat{f}(y)$.

Aufgabe 8. (6 Punkte)

Es gelte mit $u = u(x, y)$, a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ und einer gegebenen Funktion Φ die PDG

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + \Phi(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{1}$$

Diese PDG (1) heißt *hyperbolisch*, falls $D := b^2 - ac > 0$; *parabolisch*, falls $D = 0$; *elliptisch*, falls $D < 0$. Man kann solche PDG in sogenannte *kanonische Form* transformieren, in dieser Form ist die PDG (1) manchmal leichter zu lösen. Die gewöhnliche Differentialgleichung $a(dy)^2 - 2b\,dy\,dx + c(dx)^2 = 0$ heißt die *charakteristische Gleichung für die PDG* (1). Die Lösungen der charakteristischen Gleishung sind durch die Identität $y - \frac{b\pm\sqrt{D}}{a}x = c$ gegeben.

Falls $D > 0$, dann gibt es zwei unabhängige reelle Lösungen der charakteristischen Gleishung. Und die Variablentransformation $\xi = y - \frac{b+\sqrt{D}}{a}x$, $\eta = y - \frac{b-\sqrt{D}}{a}x$ in PDG (1) führt auf die kanonische Form der hyperbolischen Gleichung: $u_{\xi\eta} = \widetilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ mit einiger Funktion $\widetilde{\Phi}$. Mit weiterer Variablentransformation $\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}$, $\beta = \frac{\xi-\eta}{2}$ bekommt man auch die zweite kanonische Form der hyperbolischen Gleichung: $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \widetilde{\Phi}(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$.

Falls $D = 0$, dann gibt es nur eine reelle Lösung der charakteristischen Gleishung. In diesem Fall, nutzt man die Variablentransformation $\xi = y - \frac{b}{a}x$, $\eta = f(x, y)$, wobei ist f eine beliebige einmal stetig differenzierbare Funktion, die so gewählt wird, dass diese Variablentransformation nicht degeneriert ist. Diese Variablentransformation in PDG (1) führt auf die kanonische Form der parabolischen Gleichung: $u_{\eta\eta} = \widetilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

Falls $D < 0$, sind die Lösungen der charakteristischen Gleishung komplex konjugiert. Dann führt die Variablentransformation $\xi = Re(y - \frac{b\pm\sqrt{D}}{a}x)$, $\eta = Im(y - \frac{b\pm\sqrt{D}}{a}x)$ in PDG (1) auf die kanonische Form der elliptischen Gleichung: $u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = \widetilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

Definieren Sie den Typ der gegebenen PDG (hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch), finden Sie die kanonische Form der PDG und lösen Sie die PDG.

a) **(2 Punkte)** $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0$.

b) **(2 Punkte)** $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0$.

c) **(2 Punkte)** $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - u_x + u_y = 0$.

Aufgabe 9. (5 Punkte)

Seien Γ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung (vgl. A.1.b.) und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ eine offene und beschränkte Menge mit $\mathcal{L}^n(\Omega) > 0$. Beweisen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \int_\Omega \Gamma(x - z)\,dz$ für $n \geq 3$ beschränkt ist, für $n = 2$ hingegen nicht. *Hinweis:* Überlegen Sie sich im Fall $n \geq 3$ zunächst, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ eine Kugel B gibt mit $\mathcal{L}^n(B) = \mathcal{L}^n(\Omega)$ und $\int_\Omega \Gamma(x - z)\,dz \leq \int_B \Gamma(x - z)\,dz$.
