Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Yana Kinderknecht

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2013/2014)
Blatt 3 (16 Punkte)

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 11.11.2013.

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem (⊛) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ endlich-dimensionale reelle Vektorräume und $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ eine Funktion. Die Funktion F ist genau dann *differenzierbar* an einer Stelle $x_0 \in \mathcal{X}$, wenn eine lineare Abbildung $F'(x_0) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ existiert, derart, dass:

$$\frac{1}{|x|_{\mathcal{X}}} |F(x_0 + x) - F(x_0) - F'(x_0)x|_{\mathcal{Y}} \to 0, \quad \text{wobei} \quad |x|_{\mathcal{X}} \to 0.$$

Dabei werden mit $|\cdot|_{\mathcal{X}}$ und $|\cdot|_{\mathcal{Y}}$ die Normen der Vektorräume $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$ bezeichnet. Weil alle Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum äquivalent sind, ist die Definition der Differenzierbarkeit von der Auswahl der Norm unabhängig.

Seien $\mathcal{X} = R^{n\times n} \cong$ Vektorraum der $(n\times n)$-Matrizen, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$, $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $F(X) = \det X$ für alle $X \in \mathcal{X}$, und $I_n = (\delta_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass $F'(I_n)X = \operatorname{Spur} X$ für alle $X \in \mathcal{X}$. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\det(I_n + \varepsilon X) = 1 + \varepsilon \operatorname{Spur} X + \varepsilon^2 k(X)$, wobei $k(X)$ eine von X abhängige Konstante ist und mit $\operatorname{Spur} X := \sum_{i=1}^{n} X_{ii}$ die *Spur der Matrix* X bezeichnet wird.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Für eine differenzierbare Abbildung (*Tensor*) $\tau := (\tau_{\alpha k})$, $\tau : \Omega \to \mathbb{R}^{nN}$ (wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen) definiert man die *Vektordivergenz*

$$\operatorname{div}\tau := \sum_{\alpha=1}^{n} \partial_\alpha \tau_\alpha \equiv \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \partial_\alpha \tau_{\alpha k} \right)_{k=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^N.$$

Für $P := (P_{\alpha k})$, $Q := (Q_{\alpha k}) \in \mathbb{R}^{nN} \cong \mathbb{R}^{n\times N}$ wird durch die Vorschrift $P : Q := \sum_{\alpha,k=1}^{n,N} P_{\alpha k} Q_{\alpha k}$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum der $(n \times N)$-Matrizen erklärt. Die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm ist gegeben durch $|P| := \sqrt{P : P}$.

Betrachten Sie die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n - \{0\} \to S^{n-1} := \partial B_1(0)$, $x \mapsto x/|x|$.

a) **(1 Punkt)** Welche geometrische Bedeutung hat π? Ist π im Ursprung stetig fortsetzbar?

b) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\nabla\pi(x) = \frac{1}{|x|}(I_n - \frac{x\otimes x}{|x|^2})$ für alle $x \neq 0$ gilt und $\nabla\pi(x)y = y - (x\cdot y)x$ für alle $x \in S^{n-1}$ und $y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Dabei ist $x \otimes y := (x_i y_j)_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das *dyadische Produkt* von $x, y \in \mathbb{R}^n$.

c) **(2 Punkte)** Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^1(\Omega; S^{n-1})$. Zeigen Sie, dass $\pi \circ u \in C^1(\Omega; S^{n-1})$ und für alle $\eta \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ die Beziehung

$$\nabla u : \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \nabla[\pi\circ(u+t\eta)] = \nabla u : \nabla[\nabla(\pi\circ u)\eta] \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ offen und beschränkt, $2 \leq p < \infty$ und $u_0 \in C^0(\partial\Omega;\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$. Betrachten Sie das Funktional $J : \mathbb{K} \to \overline{\mathbb{R}}$ (wobei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), $J[w] := \int\limits_\Omega |\nabla w|^p\, dx$, in der Funktionenklasse $\mathbb{K} := \{w \in C^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N) \,:\, w = u_0 \text{ auf } \partial\Omega\}$. Zeigen Sie:

a) **(1 Punkt)** J ist wohldefiniert und $\inf\limits_{w\in\mathbb{K}} J[w]$ existiert.

b) **(2 Punkte)** Ist $u \in \mathbb{K}$ eine Lösung des Variationsproblems $J \to \min$ in $\mathbb{K}$, so löst u die nichtlineare partielle Differentialgleichung $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$.

c) **($\circledast$)** Ist $u \in \mathbb{K}_o := \mathbb{K} \cap \{w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N, w(\overline{\Omega}) \subset S^{N-1}\}$ eine Lösung des Variationsproblems $J \to \min$ in $\mathbb{K}_o$, so gilt $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = -|\nabla u|^p u$.

Aufgabe 13. (6 Punkte)

a) **(2 Punkte)** Seien $a > 0$, $k \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ gegeben. Seien $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ sowie $U, F : [0,T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, $U(t,x,y,z) := u(x,y,z)e^{-2\pi ikt}$, $F(t,x,y,z) := f(x,y,z)e^{-2\pi ikt}$. Zeigen Sie, dass die Funktion U die Wellengleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2\Delta U = F$ genau dann löst, wenn die Helmholtz Gleichung $\Delta u + cu = f$ mit einer Konstante $c := c(a,k)$ gilt. Bestimmen Sie die Konstante c. Eine solche Lösung U der Wellengleichung heißt *monochromatische Welle* mit *Frequenz* k und *komplexer Amplitude* u.

b) **(2 Punkte)** Für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sei $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Bestimmen Sie die, nur von r abhängigen, Lösungen $u : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$ der dreidimensionalen *Helmholtz Gleichung* $\Delta u + cu = 0$ mit $c = -\kappa^2 < 0$. *Hinweis:* Substituieren Sie $w := ru$.

c) **(2 Punkte)** Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei $r := \sqrt{x^2+y^2}$. Zeigen Sie, dass die, nur von r abhängigen, Lösungen $u : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$ der zweidimensionalen *Helmholtz Gleichung* $\Delta u + cu = 0$ mit $c = \kappa^2 > 0$ einer *Besselschen Differentialgleichung* der Form

$$t^2\frac{d^2w}{dt^2} + t\frac{dw}{dt} + t^2 w = 0 \quad \text{genügen.}$$

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/