Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Yana Kinderknecht

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2013/2014)
Blatt 4 (16 Punkte)

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 18.11.2013.

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem ($\circledast$) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 14. (9 Punkte)

Jede Funktion $f \in L^2[0,2\pi] := \left\{ u : [0,2\pi] \to \mathbb{R},\ \int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx < \infty \right\}$ lässt sich in eine trigonometrische Reihe $f \rightsquigarrow \frac{1}{2}a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ entwickeln, wobei sich die Koeffizienten a_n, b_n, $n = 0, 1, \dots$ aus den Euler–Fourierschen Formeln wie folgt ergeben: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt$. Die trigonometrische Reihe von f konvergiert gegen f in der Norm des L^2-Raums. Wenn f darüber hinaus eine C^1-Funktion auf $[0,2\pi]$ mit $f(0) = f(2\pi)$ ist, konvergiert ihre trigonometrische Reihe gleichmäßig auf dem Segment $[0,2\pi]$ gegen f. Mittels einer linearen Variablentransformation $y = \alpha x + \beta$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, zeigt man die gleiche Behauptungen für $f \in L^2[\Omega]$, falls $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Segment ist.

Gegeben seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$, α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \geq 0$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$, $k = 1, 2$, sowie $p \in C^1[a,b]$ mit $p(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$ und $q \in C^0[a,b]$ mit $q(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$. Betrachtet wird das folgende Randwertproblem mit dem Parameter λ:

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in (a,b), \tag{1}$$

$$\alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = 0, \quad \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \tag{2}$$

Dieses Randwertproblem ist äquivalent zum Problem der Suche nach Eigenwerten und Eigenfunktionen des *Operators vom Sturm–Liouville Typ* L, wobei $L : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ auf

$$D(L) := \left\{ u \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b],\ u \,\text{erfüllt die Randbedingungen (2)} \right\}$$

durch die Formel $Lu(x) = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] + q(x)u(x)$ definiert ist.

Satz: Die Menge der Eigenwerte des Sturm–Liouville-Operators L ist abzählbar. Ferner, sind alle Eigenwerte λ_n, $n \in \mathbb{N}$ nicht negativ und die entsprechende Eigenfunktionen u_n (d.h. $Lu_n = \lambda_n u_n$) bilden eine Orthogonalbasis des $L^2[a,b]$, d.h. jede Funktion $f \in L^2[a,b]$ lässt sich in Fourier-Reihe $f \rightsquigarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ entwickeln, wobei $c_n := \frac{(f,u_n)_{L^2[a,b]}}{\|u_n\|^2_{L^2[a,b]}} \equiv \frac{\int_a^b f(x)u_n(x)dx}{\int_a^b u_n^2(x)dx}$.

Satz von Steklov: Sei $f \in D(L)$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ von f absolut und gleichmäßig auf dem Segment $[a,b]$ gegen f.

a) **(1 Punkt)** Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x(2\pi - x)$ in eine trigonometrische Reihe auf $[0, 2\pi]$.

b) **(2 Punkte)** Lösen Sie mittels Trennung der Variablen das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t(t,x) = 4u_{xx}(t,x), & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & \forall\, t > 0, \\ u(0,x) = \sin 2\pi x & \forall\, x \in (0,1). \end{cases}$$

c) **(3 Punkte)** Lösen Sie mittels Trennung der Variablen das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & x \in (0,l), \quad y \in (0, y_0), \\ u_x(0,y) = -\frac{1}{2y_0} \sin \frac{5\pi y}{2y_0}, & u_x(l,y) = \sin \frac{7\pi y}{2y_0}, \\ u(x,0) = 0, & u_y(x, y_0) = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Nutzen Sie nach der Trennung der Variablen zuerst die Null-Randwerte.

d) **(3 Punkte)** Lösen Sie mittels Trennung der Variablen das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, & r \in [0,1), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \\ u(1,\varphi) = \varphi(2\pi - \varphi). \end{cases}$$

Hinweis: Arbeiten Sie mit Polarkoordinaten (vgl. A.1). Gesucht ist eine in $B_1(0)$ harmonische Funktion u, deshalb ist u beschränkt in $r = 0$ und $u(r, 0^+) = u(r, 2\pi^-)$ für alle $r \in (0,1)$.

Aufgabe 15. (7 Punkte)

a) **(1 Punkt)** Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation $\widehat{f}$ (vgl. A.7) der Gauß–Dichte $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$, durch die Formel $\widehat{f}(y) = \sqrt{\pi/a}\, e^{-\frac{y^2}{4a}}$ gegeben ist.

b) **(2 Punkte)** Für gegebene Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist die *Faltung* $f * g$ durch die Formel $f * g(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(z-x) g(x) dx$ definiert. Zeigen Sie, dass für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ die Faltung $f * g$ wohldefiniert ist, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ und die Identität $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$ gilt.

c) **(4 Punkte)** Lösen Sie mittels Fouriertransformation das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t(t,x) = 4u_{xx}(t,x), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0,x) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hinweis: Nutzen Sie die Ergebnisse der Aufgaben 7 und 15 a),b) sowie die Identität $\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{\sigma}} dx = 1$, wobei $y \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ beliebig.
