Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Yana Kinderknecht

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2013/2014)
Blatt 5 (16 Punkte)

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 25.11.2013.

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem ($\circledast$) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 16. (3 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit genügend glattem Rand. Betrachten Sie das *Dirichlet-Problem* zur *Poisson-Gleichung*

$$\Delta u = f \text{ auf } \Omega, \quad u = u_0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{1}$$

für Funktionen $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Dabei seien Funktionen $f \in C^0(\Omega)$ und $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ vorgegeben. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (1). Beweisen Sie mittels der sog. *Energieintegral-Methode*, dass u eindeutig bestimmt ist: Betrachten Sie $w := u - v$ mit einer weiteren Lösung v von (1), multiplizieren die Laplace-Gleichung für w mit w selbst, und wenden den Satz von Gauß an, um das Integral $\int_\Omega \operatorname{div}(w\nabla w)dx$ zu untersuchen.

Aufgabe 17. (6 Punkte)

Sei $\Omega := B_1(0)$. Betrachten Sie das Funktional J aus A.12 mit $p = 2$ und $N = n \geq 3$. Gibt man als Randwerte $u_0(x) := x$ vor, so gibt es aus topologischen Gründen keine stetige Funktion $u : \overline{\Omega} \to S^{n-1}$ mit $u = u_0$ auf $\partial\Omega$. (Diese Aussage ist in Literatur als "No-Retraction-Theorem" bekannt.) Demnach kann das Variationsproblem $J[w] \to \min$ in $\mathbb{K}_o$ zu diesen Randwerten keine Lösung besitzen. Man kann aber zeigen, dass die sog. *Standardsingularität* $\overline{u} : \overline{\Omega} - \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $\overline{u}(x) := x/|x|$ in einem verallgemeinerten Sinn die eindeutige Minimalstelle von J in $\mathbb{K}_o$ zu diesen Randwerten ist.

a) **(3 Punkte)** Zeigen Sie: Für jedes $\eta \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ist

$$\int_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{\eta}{|x|}\right) dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}\left(\frac{\eta}{|x|}\right) dx,$$

wobei $\Omega_\varepsilon := \Omega - B_\varepsilon(0)$ ist. *Hinweis:* Satz von Gauß.

b) **(3 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\overline{u}$ eine verallgemeinerte (schwache) Lösung der Differentialgleichung aus A.12 c) (mit $p = 2$) ist, d.h. es gilt:

$$\int_\Omega \nabla\overline{u} : \nabla\eta \, dx = \int_\Omega |\nabla\overline{u}|^2 \overline{u} \cdot \eta \, dx \qquad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Aufgabe 18. (1 Punkt)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine in $\xi \in \Omega$ stetige Funktion. Beweisen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_\varepsilon(\xi))} \int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = u(\xi).$$

Aufgabe 19. (2 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen $\mathcal{L}^n(B_R(0))$ der n-dimensionalen Kugel $B_R(0)$. *Hinweis:* Nutzen Sie die Identität

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}, \quad \text{wobei} \quad \Gamma \text{ die Gamma-Funktion ist.}$$

Aufgabe 20. (4 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit genügend glattem Rand sowie $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt:

$$\int_{\partial\Omega} [u(z)\partial_{\mathcal{N}}\Gamma(x-z) - \partial_{\mathcal{N}}u(z)\Gamma(x-z)] \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) + \int_\Omega \Delta u(z) \, \Gamma(x-z) \, dz = U(x),$$

$$\text{wobei } U(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \Omega; \\ u(x)/2, & x \in \partial\Omega; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n - \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Darin bezeichnen Γ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung (vgl. A.1) und $\mathcal{N}$ das äußere Einheitsnormalenfeld an $\partial\Omega$. In der Vorlesung wurde der Fall $x \in \Omega$ bereits behandelt (siehe Satz 1.3 in § II.1). Beweisen Sie die verbleibenden Fälle analog.
