Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Yana Kinderknecht

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2013/2014)
Blatt 6 (16 Punkte)

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 02.12.2013.

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem (⊛) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 21. (5 Punkte)

a) **(1 Punkt)** Seien $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und die Funktion $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$ durch die Formel

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 - 2x + x^2 + y^2}$$

gegeben. Zeigen sie, dass die Funktion u auf $B_1(0)$ harmonisch ist.

b) **(1 Punkt)** Untersuchen Sie, ob das Maximumprinzip für die Funktion u aus Teil a) auf der ganzen Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ gilt.

c) **(1 Punkt)** Finden Sie alle auf $\mathbb{R}^2$ harmonische Funktionen u mit

$$u_y(x, y) = 3xy^2 - x^3.$$

d) **(1 Punkt)** Seien $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und die Funktion $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$ durch die Formel

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1^2 x_2^4 \cdots x_n^{2^n}}{\sqrt[117]{1 + \sin^2 x_1 \sin^4 x_2 \cdots \sin^{2^n} x_n}}$$

gegeben. Untersuchen Sie, ob diese Funktion u auf $B_1(0)$ harmonisch ist.

e) **(1 Punkt)** Finden Sie alle auf $\mathbb{R}^n$ harmonische Funktionen, die auch zum Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ gehören.

Aufgabe 22. (2 Punkte)

Seien $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ sowie $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $\Delta u = 0$ auf $\overline{\Omega}$ und $u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0$ für alle $x \in (0, 1)$. Finden Sie heraus, ob die Funktion

$$f(x) := \int_0^1 u^2(x, y)\,dy$$

auf dem Intervall $(0, 1)$ einen Wendepunkt besitzen kann. *Hinweis:* Untersuchen Sie das Vorzeichen der Funktion f''.

Aufgabe 23. (5 Punkte)

a) **(2 Punkte)** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\Omega)$ subharmonisch (d.h. $\Delta u \geq 0$ auf Ω), so gilt

$$u(x) \leq \fint_{B_R(x)} u(z)dz \quad \text{und} \quad u(x) \leq \fint_{\partial B_R(x)} u(z)d\mathcal{H}^{n-1}(z)$$

für alle Kugeln $B_R(x) \subset\subset \Omega$. Dabei ist $\fint_A f d\lambda := \frac{1}{\lambda(A)} \int_A f d\lambda$ für beliebiges Maß λ.

b) **(3 Punkte)** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch sowie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und C^2, so ist $f \circ u$ subharmonisch.

Aufgabe 24. (4 Punkte)

a) **(1 Punkt)** Seien Ω ein Gauß-Gebiet (vgl. Satz 1.1) sowie $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine beliebige auf Ω harmonische Funktion. Zeigen Sie:

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\mathcal{N}} u \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie die erste Greensche Formel mit $f :\equiv 1$ und $g :\equiv u$.

a) **(3 Punkte)** Sei Ω ein Gauß-Gebiet. Zeigen Sie, dass das Dirichlet-Randwertproblem für die Laplace-Gleichung auf Ω bezüglich der Randwerte stabil ist. D.h.: Falls u_k das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \Omega, \\ u = \varphi_k & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

löst, $k = 1, 2$, sowie für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $\sup_{x \in \partial\Omega} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon$ gilt, so folgt

$$\sup_{x \in \Omega} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \varepsilon.$$

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:
http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/