Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Yana Kinderknecht

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2013/2014)
Blatt 7 (16 Punkte)

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 16.12.2013.

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem (⊛) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand. Seien u, $g(x,\cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ für alle $x \in \Omega$ harmonisch. Die Fundamentalformel der Potenzialtheorie ergibt für alle $x \in \Omega$

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[u(y)\partial_{\mathcal{N}(y)}\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y)\partial_{\mathcal{N}(y)}u(y)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y). \tag{1}$$

Die 2. Greensche Formel für u und $g(x,\cdot)$ ergibt für jedes $x \in \Omega$

$$0 = \int\limits_{\partial\Omega} \left[u(y)\partial_{\mathcal{N}(y)}g(x,y) - g(x,y)\partial_{\mathcal{N}(y)}u(y)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y). \tag{2}$$

Subtraktion der Formel (2) von der Formel (1) liefert mit der Bezeichnung $G(x,y) := \Gamma(x-y) - g(x,y)$ die Identität

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[u(y)\partial_{\mathcal{N}(y)}G(x,y) - G(x,y)\partial_{\mathcal{N}(y)}u(y)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Falls eine Funktion g existiert mit $G(x,y) = 0$ für alle $x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$, so ermöglicht die Formel (3) eine direkte (zumindest formale) Darstellung der Lösung des Dirichlet–Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \Omega, \\ u = \psi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

in der Form:

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} u(y)\partial_{\mathcal{N}(y)}G(x,y)d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int\limits_{\partial\Omega} \psi(y)\partial_{\mathcal{N}(y)}G(x,y)d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Man kann erwarten: Wenn eine Funktion g existiert mit $\partial_{\mathcal{N}(y)}G(x,y) = 0$ für alle $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$, so ermöglicht die Formel (3) eine direkte (zumindest formale) Darstellung der Lösung des Neumann–Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \Omega, \\ \partial_{\mathcal{N}}u = \psi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Aufgabe 25. (3 Punkte)

a) **(1 Punkt)** Zeigen Sie, dass die Identität $\int_{\partial\Omega} \psi \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0$ eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (4) ist.

b) **(1 Punkt)** Zeigen Sie: Die Bedingung

$$\partial_{\mathcal{N}(y)} G(x,y) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und alle } y \in \partial\Omega \tag{5}$$

kann nicht gelten.

c) **(1 Punkt)** Finden Sie eine Konstante $\widetilde{C} \neq 0$, sodass die Forderung

$$\partial_{\mathcal{N}(y)} G(x,y) = \widetilde{C} \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und alle } y \in \partial\Omega \tag{6}$$

der Harmonizität von g nicht widerspricht.

Hinweis: Benutzen Sie A.24(a) sowie die Fundamentalformel der Potenzialtheorie (1) für die Funktion $u(x) \equiv 1$.

Wenn eine Funktion g mit (6) gefunden werden kann, so liefert die Formel (3) eine direkte (zumindest formale) Darstellung der Lösung (bis auf eine Konstante C) des Neumann–Randwertproblems (4):

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[\widetilde{C} u(y) - G(x,y)\partial_{\mathcal{N}(y)} u(y)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y) = C - \int\limits_{\partial\Omega} G(x,y)\psi(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Dabei ist $C := \widetilde{C} \int\limits_{\partial\Omega} u \, d\mathcal{H}^{n-1}$ eine unbekannte Konstante. Falls Ω unbeschränkt ist, so widerspricht die Bedingung (5) der Harmonizität von g nicht mehr. Darüber hinaus kann das Neumann–Randwertproblem (4) höchstens eine reguläre Lösung u (d.h.: $\exists \lim\limits_{x\to\infty} u(x) \in \mathbb{R}$) haben.

Allgemeiner Fall: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein unbeschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand. Sei Γ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, und $g(x,\cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ sei für alle $x \in \Omega$ eine auf Ω harmonische Funktion. Seien $\alpha, \beta \in C^0(\partial\Omega)$ vorgegebene Funktionen mit $\alpha^2(y) + \beta^2(y) > 0$ auf $\partial\Omega$. Eine Funktion $G(x,y)$ mit

$$\begin{cases} G(x,y) = \Gamma(x-y) - g(x,y) & \text{für alle } x \in \Omega,\ y \in \overline{\Omega}, \\ \alpha(y)G(x,y) + \beta(y)\partial_{\mathcal{N}(y)} G(x,y) = 0 & \text{für alle } x \in \Omega,\ y \in \partial\Omega, \\ \exists \lim\limits_{y\to\infty} G(x,y) \in \mathbb{R} & \text{für alle } x \in \Omega \end{cases} \tag{7}$$

heißt eine *Green-Funktion zum Randwertproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \Omega, \\ \alpha u + \beta \partial_{\mathcal{N}} u = \psi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Wenn eine solche Funktion $G(x,y)$ existiert, so ermöglicht die Formel (3) eine (zumindest formale) Darstellung der Lösung von (8).

Aufgabe 26. (5 Punkte)

Seien $n \geq 2$ und $\Omega = \mathbb{R}^n_+ := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ \ x_n > 0\}$ der obere Halbraum. Wir bezeichnen mit x^* den zu x gehörigen Spiegelungspunkt bzgl. der Hyperebene $\mathbb{R}^n_0 := \partial\mathbb{R}^n_+$, d.h.: $x^* := (x', -x_n)$.

a) **(1 Punkt)** Zeigen Sie: Für jedes fixierte $x \in \Omega$ wird durch

$$G(x,y) := \Gamma(x-y) - \Gamma(x^* - y)$$

eine Green-Funktion des Dirichlet-Randwertproblems (d.h. des Problems (8) mit $\alpha(y) \equiv 1$ und $\beta(y) \equiv 0$ auf $\partial\Omega$) auf dem Halbraum $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ erklärt. Ist G eindeutig bestimmt?

b) **(1 Punkt)** Berechnen Sie die Normalableitung von G und finden Sie eine Darstellung der Lösung des Dirichlet-Randwertproblems mittels der Formel (3).

c) **(3 Punkte)** Für eine gegebene Funktion $\psi \in C^0(\mathbb{R}^n_0) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_0)$ sei

$$u(x) := \frac{2x_n}{n\mathcal{L}^n(B_1)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_0} \frac{\psi(z)}{(|x'-z|^2 + x_n^2)^{n/2}}\, dz, \quad x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Beweisen Sie, dass u wohldefiniert ist und die folgenden Eigenschaften besitzt:

i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$,
ii) $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n_+$,
iii) $\lim\limits_{x \to \xi} u(x) = \psi(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n_0$.

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, dass $\int\limits_{\mathbb{R}^n_0} \frac{dw}{(1+|w|^2)^{n/2}} = 1$ gilt. Benutzen Sie dazu die Identitäten $\mathcal{L}^n(B_1) = \frac{2}{n}\pi^{n/2}\gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)$ sowie $\int\limits_0^\infty \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{n/2}}\, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)$, wobei γ die Gamma-Funktion bezeichnet, d.h. $\gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.

In der Elektrostatik interpretiert man die Funktion $\Gamma(x - \cdot)$ als Coulomb-Potential einer Punktladung Q_x der Größe c_n, die an der Stelle x lokalisiert wird (Die Konstante c_n ist in A.1(b) definiert). Für einige Gebiete einfacher Form kann man Green-Funktionen mittels des *Prinzips der Spiegelladung* basteln: Um die in (7) gegebene Randwertbedingung zu erfüllen, muss man das Potential der Punktladung Q_x auf dem Rand kompensieren. Dafür stellt man zusätzliche Punktladungen des passenden Vorzeichens symmetrisch bzgl. des Randes auf (vgl. mit der Green-Funktion in A.22(a)).

Aufgabe 27. (8 Punkte)

Sei $n = 2$, d.h. $\Gamma(x-y) = \frac{1}{2\pi}\ln|x-y|$. Bestimmen Sie Green-Funktionen der folgenden Randwertprobleme für die Laplace-Gleichung mittels des Prinzips der Spiegelladung. Geben Sie entsprechende Darstellungen der Lösungen mit Hilfe der Formel (3) an.

Aufgabe N	Das Gebiet Ω	Randwertbedingungen
a) (1 Punkt)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$	$u(x,0) = \psi(x)$
b) (1 Punkt)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$	$u'_y(x,0) = \psi(x)$
c) (1 Punkt)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$	$u(x,0) = \psi_1(x), \quad u(0,y) = \psi_2(y)$
d) (1 Punkt)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$	$u'_y(x,0) = \psi_1(x), \quad u'_x(0,y) = \psi_2(y)$
e) (1 Punkt)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$	$u(x,0) = \psi_1(x), \quad u'_x(0,y) = \psi_2(y)$
f) (1 Punkt)	$\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}\}$	$u'_\varphi(r,\pi/4) = \psi_1(r), \quad u(r,3\pi/4) = \psi_2(r)$
g) (2 Punkte)	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ y \in (0,1)\}$	$u(x,0) = \psi_0(x) \quad u(x,1) = \psi_1(x)$

Hinweis: Vorsicht bei der Berechnung der Normalableitung! Sollten Sie Polarkoordinaten verwenden, dann benutzen Sie die Identität $\operatorname{dist}(A,B) = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_A - \varphi_B)}$, wobei $A := (r_A, \varphi_A)$, $B := (r_B, \varphi_B)$.

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/