**Universität des Saarlandes**
**Fachrichtung 6.1 – Mathematik**
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Yana Kinderknecht

## Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2013/2014)
## Blatt 8 (16 Punkte)

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 06.01.2014.

---

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem (⊛) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

---

### Aufgabe 28. (3 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Version der *Ungleichung von Harnack*: Sei $u : B_R(0) \to [0, \infty)$ $(R > 0)$ eine harmonische Funktion. Dann gelten für alle $x \in B_R(0)$ die Ungleichungen

$$\frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} R^{n-2} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}} R^{n-2} u(0).$$

*Hinweis:* Benutzen Sie die Poisson-Formel und die Mittelwerteigenschaft.

### Aufgabe 29. (1 Punkt)

Überprüfen Sie, ob eine positive und auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ harmonische Funktion $u$ mit $u(0, 0, 0) = 1$ und $u(0, 0, 1/2) = 10$ existiert.

### Aufgabe 30. (4 Punkte)

a) **(2 Punkte)** Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to [0, \infty)$ harmonisch. Sei $B_{4R}(x_0) \subset \Omega$ $(R > 0)$. Zeigen Sie unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft, dass für alle $x, y \in B_R(x_0)$ die Ungleichung $u(x) \leq 3^n u(y)$ gilt.

b) **(2 Punkte)** Mittels A.30(a) beweisen Sie die folgende Version der *Ungleichung von Harnack*: Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to [0, \infty)$ harmonisch. Dann existiert zu jedem Teilgebiet $\Omega' \subset\subset \Omega$ eine Konstante $c = c(n, \Omega, \Omega')$ mit

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u.$$

*Hinweis:* Weil $\Omega'$ beschränkt und zusammenhängend ist, existiert ein derartiges $m = m(\Omega') \in \mathbb{N}$, dass je zwei Punkte $x, y \in \Omega'$ in $\Omega'$ durch einen Weg verbunden werden können, welcher durch höchstens $m$ Kugeln vom Radius $r < \frac{1}{4}\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ mit Zentrum in $\Omega'$ überdeckt werden kann.

**Aufgabe 31. ( 4 Punkte)**

Beweisen Sie den *Konvergenzsatz von Harnack*: Sei $(u_m)$ eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen $u_m : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen). Gibt es ein $\xi \in \Omega$, für welches die Folge $(u_m(\xi))$ beschränkt ist, so konvergiert $u_m$ auf jedem Teilgebiet $\Omega' \subset\subset \Omega$ gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion.

*Hinweis:* Mittels A.30 zeigen Sie, dass $(u_m)$ eine auf $\Omega'$ gleichmäßige Cauchy-Folge ist. Benutzen Sie dann Satz 2.10 der Vorlesungen.

**Aufgabe 32. ( 4 Punkte)**

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch.

a) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass $v(x) := \frac{1}{|x|} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ in $\Omega^* := \{x \in \mathbb{R}^3 : x/|x|^2 \in \Omega\}$ harmonisch ist.

b) **(2 Punkte)** Gibt es einen tieferen Grund für die Aussage aus a)? Gilt ein analoges Resultat in beliebiger Dimension $n \geq 2$?


---