Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Yana Kinderknecht

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2013/2014)
Blatt 9 (16 Punkte)

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 13.01.2014.

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem ($\circledast$) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 33. (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ rotationsinvariant ist, d.h. ist $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, so ist auch $v(x) := u(Ax)$ harmonisch.

Aufgabe 34. (5 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, u, $v \in C^0(\Omega)$ und $c > 0$. Zeigen Sie:

a) **(1 Punkt)** Sind u, v subharmonisch (superharmonisch) auf Ω, so ist $u + v$ subharmonisch (superharmonisch).

b) **(1 Punkt)** Ist u subharmonisch (superharmonisch), so folgt: cu ist subharmonisch (superharmonisch), $-cu$ ist superharmonisch (subharmonisch).

c) **(1 Punkt)** Sind u, v subharmonisch, so ist $\max\{u, v\}$ subharmonisch. Sind u, v superharmonisch, so ist $\min\{u, v\}$ superharmonisch.

d) **(1 Punkt)** Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet sowie u, $v \in C^0(\overline{\Omega})$, u subharmonisch und v superharmonisch mit $v \geq u$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie: Entweder $v > u$ auf Ω oder $v = u$ auf Ω.

e) **(1 Punkt)** Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet sowie $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Seien u eine beliebige Subfunktion zu φ und v eine beliebige Superfunktion zu φ. Zeigen Sie, dass die Ungleichung $u \leq v$ auf $\overline{\Omega}$ gilt.

Aufgabe 35. (3 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

i) u ist superharmonisch auf Ω gemäß der Definition von §4 (Kapitel II).

ii) Für jede Kugel $B_r(x) \subset\subset \Omega$ ist

$$u(x) \geq \fint_{\partial B_r(x)} u(z)\, d\mathcal{H}^{n-1}(z).$$

iii) Für jede Kugel $B_r(x) \subset\subset \Omega$ ist

$$u(x) \geq \fint_{B_r(x)} u(z)\, dz.$$

Aufgabe 36. (3 Punkte)

Sei $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ eine subharmonische Funktion mit $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) \leq 0$. Beweisen Sie:

$$u \leq 0 \quad \text{ in } \mathbb{R}^n.$$

Hinweis: Betrachten Sie eine Folge (x_m) mit $u(x_m) \to \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} u(x)$ und benutzen Sie das Maximumprinzip für subharmonische Funktionen.

Aufgabe 37. (4 Punkte)

Seien Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $u \in C^0(\Omega)$ eine subharmonische Funktion und $B := B_r(x)$ eine beliebige Kugel mit $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass der *Perron-Projektor* (oder *harmonischer Lift*) U von u auf B, definiert durch

$$U(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \Omega - B, \\ \int\limits_{\partial B} P_B(x,y) u(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y), & x \in B, \end{cases}$$

subharmonisch auf Ω ist. Dabei ist P_B der Poisson-Kern.

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/