§2 Die Sobolev Räume $W^{k,p}(\Omega)$ und ihre funktionalanalytischen Eigenschaften

$W^1(\Omega)$ (und allgemeiner $W^k(\Omega)$) ist ersichtlich ein reeller Vektorraum, dessen Elemente im vorigen Abschnitt ausführlich diskutiert worden sind. Jetzt geht es darum, geeignete Unterräume auszuwählen, die wir mit einer vollständigen Norm versehen können. Dies geht so, daß man von den Funktionen und ihren schwachen Ableitungen die Zugehörigkeit zu Räumen $L^p(\Omega)$ verlangt.

Definition: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p \le \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Der Sobolev Raum $W^{k,p}(\Omega)$ mit Differenzierbarkeitsstufe k und Integrabilitätsexponent p ist definiert durch

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^k(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le k\}.$$

Auf $W^{k,p}(\Omega)$ betrachtet man die Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, & \text{falls } 1 \le p < \infty \\ \max_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Bemerkung: Daß $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ wirklich eine Norm ist, zeigen triviale Rechnungen.

Wenn Ω fixiert ist, schreibt man kürzer $\|\cdot\|_{k,p}$ statt $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Oft betrachtet man zur Ausgangsnorm äquivalente Normen, etwa

$$\|u\|'_{k,p} := \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

$$\|u\|''_{k,p} := \max_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

was natürlich für Konvergenzaussagen, Vollständigkeit oder topologische Begriffe bedeutungslos ist. Unsere Definition der $W^{k,p}$-Norm hat den Vorteil, daß sie im Fall $p=2$ vom

Skalarprodukt: $\langle u,v\rangle_{W^{k,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial^\alpha u \, \partial^\alpha v \, dx$, $u,v \in W^{k,2}(\Omega)$,

erzeugt wird.

später mehr!

Um Randwerte von Sobolev Funktionen erklären zu können, vereinbaren wir

Definition: Der Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ wird mit $\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\Omega)$ bezeichnet. Es gilt also $u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\Omega)$ genau dann, wenn es eine Folge $\{\varphi_m\}$ von Testfunktionen gibt mit

$$\|\partial^\alpha u - \partial^\alpha \varphi_m\|_{L^p(\Omega)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \le k$.

Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ist zunächst unklar, ob und wie man u "Randwerte $u|_{\partial\Omega}$" zuordnen soll. Durch Einführen der Unterräume $\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\Omega)$ von $W^{k,p}(\Omega)$ definiert man offenbar Sobolev Funktionen, die im verallgemeinerten Sinn Randwerte 0 besitzen.

Die folgenden Sobolev Klassen spielen auch eine Rolle:

<u>lokale Räume</u> $W^{k,p}_{loc}(\Omega) =$

$$\{ u \in W^k(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p_{loc}(\Omega) \ \forall |\alpha| \leq k \},$$

d.h. alle schwachen Ableitungen bis zur Ordnung k sind jetzt nur noch lokal zur p^{ten} Potenz integrabel bzw. lokal beschränkt, wenn $p = \infty$.

<u>Mit der neuen Bezeichnung ist jetzt</u>

$$W^k(\Omega) = W^{k,1}_{loc}(\Omega).$$

Auch für <u>vektorwertige Funktionen</u> definiert man Sobolev Räume:

$$W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^L) = \{ u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^L) : \text{jede Komponente ist in } W^{k,p}(\Omega) \},$$

die Definitionen von $\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^L)$, $W^{k,p}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ sind ersichtlich, als kanonische Norm auf $W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ wählt man für $p < \infty$

$$\| u \|_{k,p} = \left(\sum_{i=1}^{L} \| u^i \|^p_{k,p} \right)^{1/p}.$$

Aus den Definitionen folgt sofort

Satz 2.1: 1) Die Einbettungen

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad , \; k \geq l$$

sind linear und stetig.

2) Im Fall $q \geq p$ und $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$ hat man eine stetige Einbettung $\quad W^{k,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$.

3) Für $p < \infty$ ist $W^{k,p}(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$. (bzgl. $\|\cdot\|_{L^p}$)

Aussage 1) ist völlig trivial, bei $W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ "vergißt" man einfach, daß u auch schwache Ableitungen in $L^p(\Omega)$ besitzt. 2) ist die Hölder'sche Ungleichung. ad 3): Wir haben uns überlegt, daß sogar $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ dicht ist (s. Satz 1.3), aus

$$C_0^\infty(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$$

folgt dann natürlich die Dichtheit von $W^{k,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ (bzgl. $\|\cdot\|_p$)

(Für $p = \infty$ ist 3) falsch: wie später gezeigt wird, besteht $W^{k,\infty}(\Omega)$ für $k \geq 1$ aus stetigen Funktionen, und bekanntlich gibt es $L^\infty(\Omega)$-Funktionen, die man nicht gleichmäßig durch stetige Funktionen approximieren kann, etwa solche, die keinen stetigen Vertreter haben.) $\square$

Mit der Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $k \geq 1$, läßt sich nichts anfangen, denn $W^{k,p}(\Omega)$ ist gemäß 3) von Satz 2.1 <u>kein</u> abgeschlossener Unterraum von $L^p(\Omega)$ (andernfalls: $W^{k,p} = L^p$!).

Andererseits übertragen sich die "schönen funktionalanalytischen Eigenschaften" eines normierten Raums X (hier L^p) nur auf abgeschlossene Unterräume.

Wir wählen deshalb eine <u>andere</u> <u>Einbettung</u> von $W^{k,p}(\Omega)$, die den Ableitungseigenschaften von $u \in W^{k,p}(\Omega)$ Rechnung trägt.

<u>Notation</u>: Für $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir auf $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ die Norm

$$\|u\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{m} \|u^i\|_p^p \right)^{1/p}, & p < \infty \\ \max\limits_{1 \leq i \leq m} \|u^i\|_\infty, & p = \infty . \end{cases}$$

Sind $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ fixiert, so setzt man

$$m := \# \{ \alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \leq k \}$$

(Anzahl der Multiindices mit Länge $\leq k$) und definiert die Einbettung

$$W^{k,p}(\Omega) \ni u \mapsto (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m),$$

wobei $(\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}$ irgendwie angeordnet wird. Für $k = 1$ hat man z.B.

$$W^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto (u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}).$$

$$u \longmapsto (u, \nabla u).$$

<u>Satz 2.2</u>: Die gerade beschriebene Abbildung $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ist eine lineare Isometrie. Der Unterraum $W^{k,p}(\Omega)$ ist <u>abgeschlossen</u> in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$. (Hier identifiziert man $W^{k,p}$ mit seinem Bild unter der Isom. ∇)

Beweis: Bis auf die Abgeschlossenheit sind alle Aussagen trivial. Sei z.B. $k = 1$ und $\{u_i\}$ Folge in $W^{1,p}(\Omega)$, sodaß $(u_i, \partial_1 u_i, \dots, \partial_n u_i)$ in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ konvergiert, also

$$\begin{cases} u_i \to u \;, \quad \partial_1 u_i \to v_1, \dots, \partial_n u_i \to v_n \\ \text{in } L^p(\Omega) \text{ bei } i \to \infty \end{cases}$$

mit Funktionen $u, v_1, \dots, v_n \in L^p(\Omega)$. Wir müssen zeigen: $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Offensichtlicher Kandidat für $\partial_\ell u$ ist v_ℓ: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Es gilt

$$\int_\Omega u \, \partial_\ell \varphi \, dx = \lim_{i \to \infty} \int_\Omega u_i \, \partial_\ell \varphi \, dx \underset{u_i \in W^{1,p}}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$- \lim_{i \to \infty} \int_\Omega \partial_\ell u_i \, \varphi \, dx = - \int_\Omega v_\ell \, \varphi \, dx .$$

Für $k > 1$ argumentiert man ganz analog. $\square$

<u>Korollar</u>: $W^{k,p}(\Omega)$ ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le p \le \infty$ ein <u>Banach Raum</u>, $W^{k,2}(\Omega)$ mit $(u,v) = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \partial^\alpha u \, \partial^\alpha v \, dx$ sogar ein <u>Hilbert Raum</u>.

(denn <u>abgeschlossene</u> Unterräume von B- oder H-Räumen sind vom selben Typ.)

Auf $W^{1,2}(\Omega)$ lautet das Skalarprodukt

$$(u,v) = \int_\Omega u v \, dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

ist also das L^2-Produkt der Funktionen plus das L^2-Produkt der (verallgemeinerten) Gradienten. Da $\overset{\circ}{W}{}^{k,2}(\Omega)$ seinerseits abgeschlossener Unterraum von $W^{k,2}(\Omega)$ ist, trägt auch $\overset{\circ}{W}{}^{k,2}(\Omega)$ Hilbertraumstruktur.

Anwendungsbeispiel: Zu lösen ist das lineare Problem

$$(1) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{auf } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

mit gegebener Funktion f. Sei $f \in L^2(\Omega)$ und angenommen $u \in C^2(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ ist Lösung. Dann folgt aus (1) durch part. Integration

$$(2) \quad \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi)\, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

zunächst für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und durch Approximation auch für $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$. Sucht man umgekehrt eine Lösung u von (1), so sind die dabei in Räumen glatter Funktionen auftretenden Probleme bekannt. Deshalb interessiert man sich für schwache Lösungen von (1). Der richtige Raum ist $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$, da dort die Randbedingung eingeht. Außerdem ist $\varphi \mapsto \int_\Omega f \varphi \, dx$ für $f \in L^2(\Omega)$ stetiges lineares

Funktional auf $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$, denn

$$\left|\int_\Omega f\varphi\,dx\right| \le \|f\|_2\,\|\varphi\|_2 \le \|f\|_2\,\|\varphi\|_{1,2},$$

und (2) bedeutet: stelle $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi\,dx$ bzgl. des Skalarprodukts auf $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$ dar. Das geht aber direkt mit dem Satz von Riesz in Hilbert Räumen.

$\square$

<u>Was bedeutet schwache Konvergenz in $W^{k,p}(\Omega)$</u>?

Seien $\{u_i\} \subset W^{k,p}(\Omega)$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Per Definition gilt

$$u_i \rightharpoonup u \quad \text{in } W^{k,p}(\Omega)$$

genau dann, wenn

(1) $\quad F(u_i) \to F(u) \quad \forall\, F \in W^{k,p}(\Omega)^*.$

Da $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$, $m := \#\{\alpha : |\alpha| \le k\}$, ist

(1) gleichwertig mit $\quad$ (Übung? Einzelheiten!)

(2) $\quad \partial^\alpha u_i \rightharpoonup \partial^\alpha u \quad$ schwach in $L^p(\Omega)$ $\forall\, |\alpha| \le k$,

und (2) ist nichts anderes als "komponentenweise" schwache Konvergenz.

Benutzt man jetzt den Satz von Riesz über die Dualräume von L^p, so ergibt sich: