# Kap. 1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

**Erinnerung:** (Reguläre Fläche)

$S \subset \mathbb{R}^3$ heißt **reguläre Fläche**, falls es zu jedem $p \in S$ eine Umgebung $V$ von $p$ im $\mathbb{R}^3$ gibt, sodass:

$\exists$ offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine Abbildung

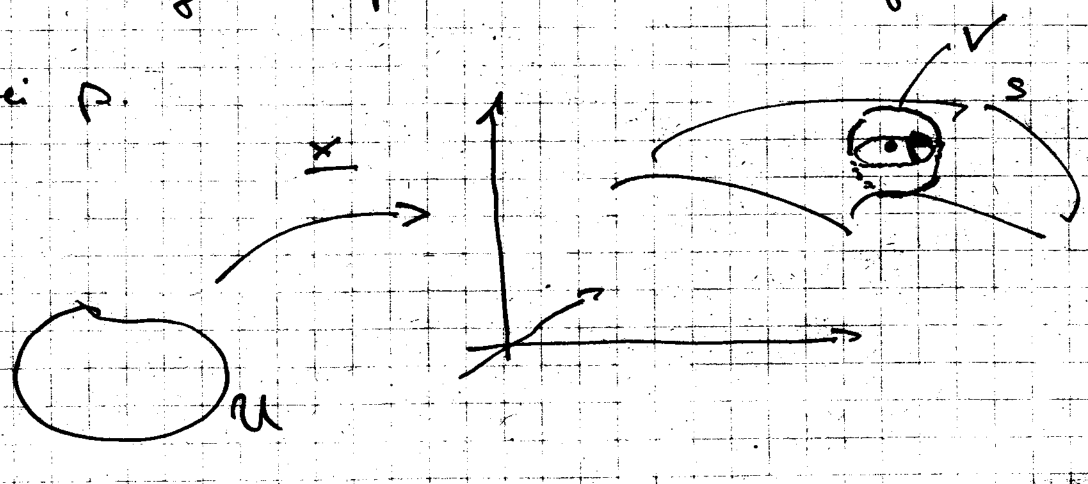
$$\underline{x} : U \to V \cap S \quad \text{mit}$$

i.) $\underline{x}$ ist **Homöomorphismus** (bijektiv, stetig, Umkehrabbildung stetig).

ii.) $\underline{x}$ ist von der Klasse $C^\infty$.

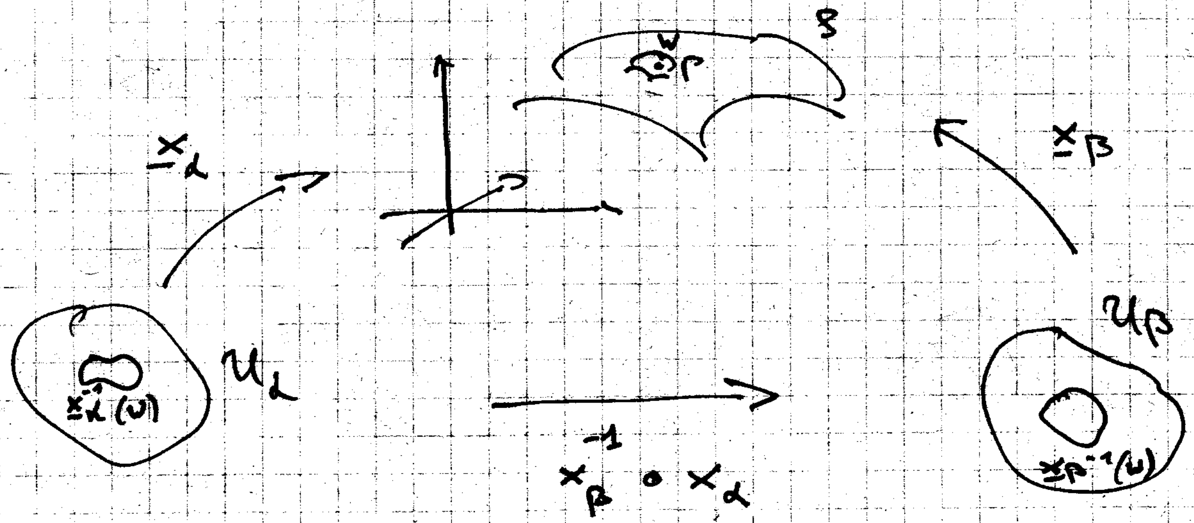
iii.) Das Differential $d\underline{x}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist in jedem $q \in U$ injektiv.

Die Abbildung $\underline{x}$ heißt dann Parametrisierung von $S$ bei $p$.



Folgerung aus der Definition:

Geht man zu einer anderen Parametrisierung über, so wird der Übergang durch einen Diffeomorphismus (Inverse auch von der Klasse $C^\infty$) beschrieben:




$\underline{x}_\alpha : U_\alpha \to S \quad , \quad \underline{x}_\beta : U_\beta \to S ,$

$\underline{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \underline{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset .$

Dann sind

$$\underline{x}_\beta^{-1} \circ \underline{x}_\alpha : \quad \underline{x}_\alpha^{-1}(W) \to \mathbb{R}^2$$
$$x_\alpha^{-1} \circ x_\beta : \quad \underline{x}_\beta^{-1}(W) \to \mathbb{R}^2$$

differenzierbar (wie immer bedeutet das $C^\infty$).

Die obigen Bemerkungen motivieren:

**Definition 1.** Eine Menge $M$ und eine Familie $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ heißt ***differenzierbare Mannigfaltigkeit*** ***der Dimension $n$*** $\in \mathbb{N}$, falls:

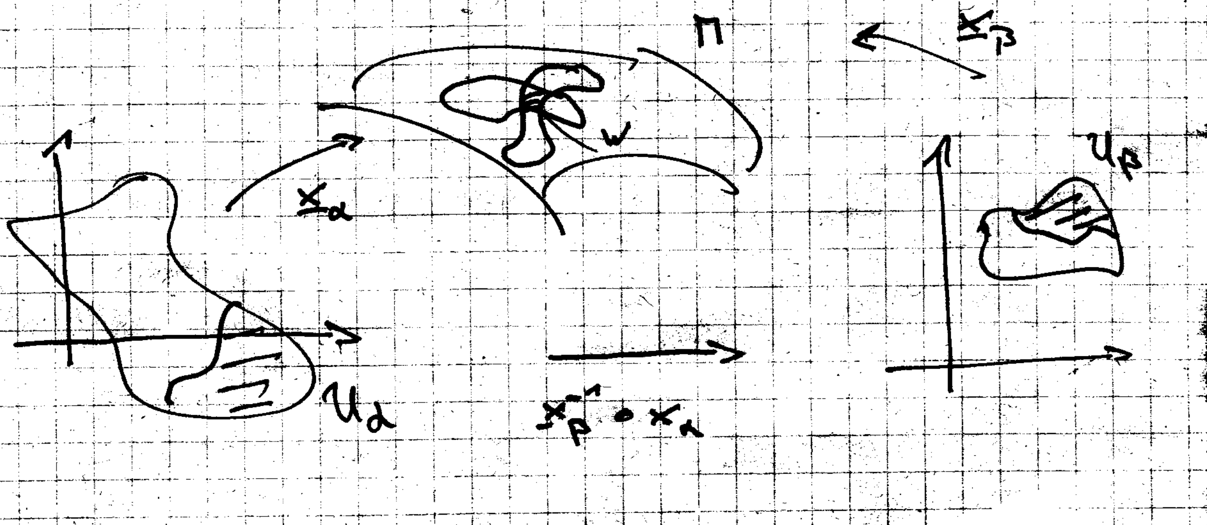
$U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_\alpha : U_\alpha \to M$ *injektiv* mit:

i.) $\bigcup_{\alpha \in A} x_\alpha(U_\alpha) = M$. bei Flächen erfüllt, hier gefordert

ii.) Für $\alpha, \beta \in A$ mit $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ sind $x_\alpha^{-1}(W)$, $x_\beta^{-1}(W)$ offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und die Abbildung $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ ist auf $x_\alpha^{-1}(W)$ differenzierbar. (als Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist diff'bar definiert)

(Diff'barkeit bedeutet immer $C^\infty$)

iii.) Die Familie $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ist maximal mit i.) & ii.)



## Bemerkungen & Notation

i.) Die Maximalität wird aus "technischen Gründen" gefordert. Sie kann durch die Vereinigung aller "zulässigen Kandidaten" erreicht werden.

ii.) • $(x_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ mit $p \in \underline{x}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ heißt <u>Parametrisierung</u> oder (lokales) <u>Koordinatensystem</u> von $M$ bei $p$.

• $x_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ heißt <u>Koordinatenumgebung von $p$</u>.

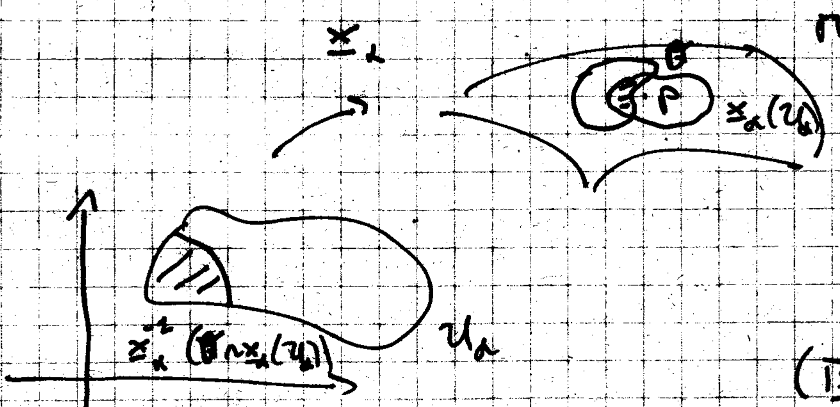
• Eine Familie $\{(x_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)\}$ mit i.) & ii.) aus Def. 1 heißt <u>differenzierbare Struktur von $M$</u>.

Gilt zusätzlich iii.), so spricht man von einem <u>Atlas</u>.

<u>Topologie.</u> Eine diff'bare Struktur induziert eine Topologie auf $M$.

$\mathcal{O} \subset M$ <u>offen</u> $:\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in A$ ist $\underline{x}_\alpha^{-1}(\mathcal{O} \cap \underline{x}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)) \subset \mathbb{R}^n$ offen.

in $\mathbb{R}^n$ off. def.




(Bsp. parametrisiertes Flächenstück ✓)

Es gilt:

i.) $\emptyset, \Pi$ sind offen

ii.) (beliebige) Vereinigung, endliche Durchschnitte offener Mengen: offen.

iii.) $\underline{x}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ ist offen, $\underline{x}_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \Pi$ ist stetig.

(Abbildung nach $\Pi$, Urbild off. Menge offen, genauso definiert)

→ Hier kurz Bem. p. 40, 41 als Grundvoraussetzung

Beispiele.

i.) Der $\mathbb{R}^n$ mit der Identität als differenzierbare Struktur ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

ii.) Der $n$-dim reelle projektive Raum $P^n(\mathbb{R})$.

$$P^n(\mathbb{R}) := \{ \text{Geraden im } \mathbb{R}^{n+1} \text{ durch } \underline{0} = (0,0,\dots,0)\}.$$

("Richtungen im $\mathbb{R}^{n+1}$")

## Hat der $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ eine diff'bare Struktur?

Betr. dazu auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation "$\sim$"

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } y = \lambda x.$$

( • Reflexivität
$x \sim x$
• Symmetrie
$x \sim y \Rightarrow y \sim x$
• Transitivität
$x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ )

Dann ist $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ der Quotientenraum

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim .$$

Ein Punkt in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ wird mit

$$[x_1, x_2, \dots x_{n+1}]$$

bezeichnet. Für $x_i \neq 0$ gilt dann

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots \frac{x_{n+1}}{x_i}\right].$$

Für $i = 1, \dots, n+1$ ist die Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$, die durch $0$ verlaufen & nicht in der Hyperebene $\{x_i = 0\}$ liegen

$$V_i := \{[x_1, \dots, x_{n+1}] : x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

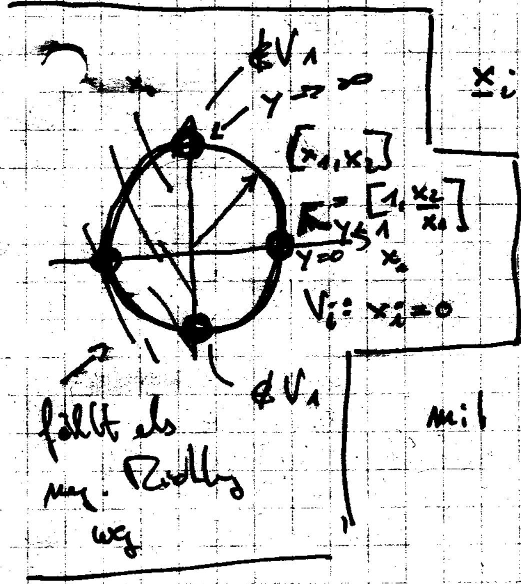
("Richtungen mit Komponente $x_i$")

Dann sind die

$$\{V_i\}_{i=1,\dots,n+1} \quad \underline{\underline{\text{Koordinatenumgebungen}}}, \qquad (x_\alpha(U_\alpha))$$

ein (lokales) <u>Koordinatensystem</u> ist gegeben durch

$$\underline{x}_i : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}),$$




$$\underline{x}_i(y_1, \dots, y_n) = [\underbrace{y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i \dots y_n}_{\text{"Länge" } n+1}]$$

$$\Big( \quad = [x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \dots x_{n+1}] \quad (x_i \neq 0)$$

$$\text{mit } y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \dots, y_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, \; y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots y_n = \frac{x_{n+1}}{x_i} \Big)$$

(<u>Koordinaten</u>)

In der Tat ist $\{(\underline{x}_i, \mathbb{R}^n)\}_{i=1,\dots,n+1}$ eine diff'bare Struktur auf $P^n(\mathbb{R})$, da

$$\underline{x}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_i \quad (\subset P^n(\mathbb{R})) \quad \text{bijektiv ist.}$$

(klar nach Def.)

& : ad i.) Def 1. : $\bigcup_i \underline{x}_i(\mathbb{R}^n) = P^n(\mathbb{R})$ ✓

(auch klar nach Def.)

Bleibt iii), Def. 1 zu zeigen d.h.

- $\underline{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen. $\big(W := \underline{x}_i(\mathbb{R}^n) \cap \underline{x}_j(\mathbb{R}^n) = V_i \cap V_j\big)$
- $\underline{x}_j^{-1} \circ \underline{x}_i$ diff'bar. (auf $\underline{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j)$)

Sei also o.E. $i > j$.

Im Urbild kein "i"

Dann ist $\underline{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j) = \{ (y_1, \dots, y_n) : y_j \neq 0 \}$,

d.h. $\underline{x}^{-1}(V_i \cap V_j)$ ist offen. ✓ $\big( y_j = 0 : x_j = 0$, gehört nicht zu $V_j \big)$

$\big( i < j : \underline{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j) : y_{j-1} \neq 0 \big)$

Weiterhin gilt für $y \in \underline{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j)$:

$$\underline{x}_j^{-1} \circ \underline{x}_i (y_1, \dots, y_n) = \underline{x}_j^{-1}\big([y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n]\big)$$

$$\overset{y_j \neq 0}{=} \underline{x}_j^{-1}\left(\left[\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, 1, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right]\right)$$

$$= \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right)$$

$\Rightarrow$ Diff'barkeit.

Insgesamt ist gezeigt, dass es sich um eine diff'bare Struktur handelt, auf $V_i$ heißen

$\left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$ inhomogene Koordinaten, $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ homogene Koordinaten

# Differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

Definition 2. Es seien $M_1 = M_1^{(n)}$ & $M_2 = M_2^{(m)}$ n bzw. m-dim. diff'bare Mannigfaltigkeiten und

| beachte: Differential zwischen Tangentialräumen noch nicht definiert |

$$\varphi : M_1 \to M_2$$

sei stetig (bzgl. der induzierten Topologien).

Die Abbildung $\varphi$ heißt differenzierbar in $p \in M_1$, falls gilt: Ist

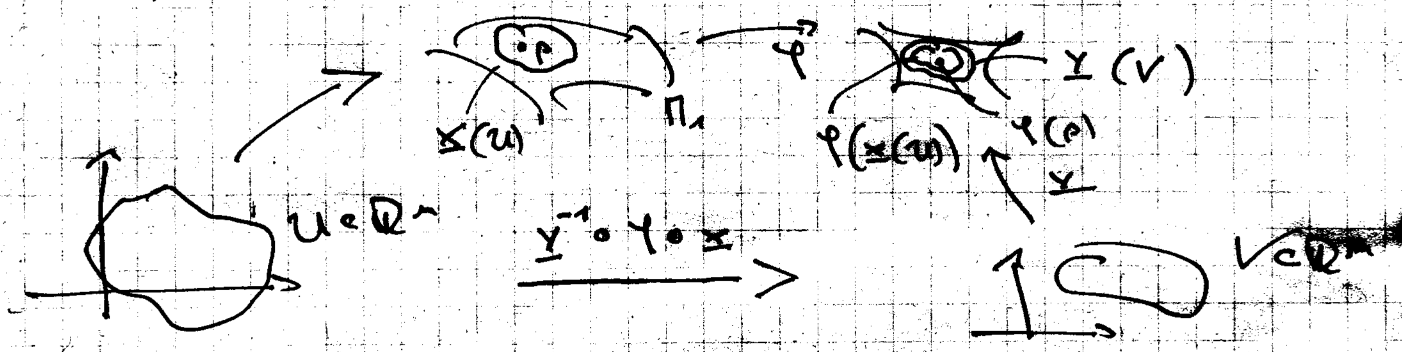
$\underline{y} : \mathbb{R}^m \supset V \to M_2$ eine Parametrisierung bei $\varphi(p)$,

$\underline{x} : \mathbb{R}^n \supset U \to M_1$ eine Parametrisierung bei $p$

mit $\varphi(\underline{x}(U)) \subset V$,

so ist
$$\underline{y}^{-1} \circ \varphi \circ \underline{x} : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$$
diff'bar in $\underline{x}^{-1}(p)$.

$\varphi$ heißt diff'bar auf einer offenen Teilmenge von $M_1$, falls $\varphi$ in jedem Punkt dieser Menge diff'bar ist.



# „Verallgemeinerte" Tangentenvektoren (im Vgl. zu Kurven im $\mathbb{R}^n$)

Man betrachte zur Motivation eine diff'bare Kurve

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, \quad \alpha(0) = p \in \mathbb{R}^n.$$

Für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

$$\alpha'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)),$$

$$\alpha'(0) =: \underline{v} \in \mathbb{R}^n.$$

beachte: Kurve im $\mathbb{R}^n$, Tangentenvektor $\alpha' \in \mathbb{R}^n$
Kurve auf $M \leadsto$ ?
Analog Fläche in $\mathbb{R}^3$
Tangentialebene $D\Phi(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$
hier?

Es sei weiter $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$ & $f : U \to \mathbb{R}$ diff'bar.

Um die Richtungsableitung von $f$ in Richtung $v$ zu definieren, betrachtet man

$$f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$$

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\alpha(0)} \frac{dx_i}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$= \left( \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right) f.$$

(Tangentenvektor „als Vorschrift, in welche Richtung eine ~~Fkt~~ zu differenzieren ist")

Die Richtungsableitung kann als linearer Differentialoperator auf der Menge der in $p$ diff'baren Funktionen interpretiert werden.

<u>**Definition 3.**</u> Es sei $M$ diff'bare Mannigfaltigkeit,

$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ (diff'bare) Kurve in $M$.
→ Def. 2 ✓

Es sei $p = \alpha(0) \in M$ und

$$D_p := \{ f : M \to \mathbb{R},\ f \text{ in } p \text{ diff'bar} \}$$

Der <u>Tangentenvektor an der Kurve $\alpha$ in $t=0$</u> ist eine <u>Abbildung</u>

$$\alpha'(0) : D_p \to \mathbb{R},$$

$$\alpha'(0) f := \left(\alpha'(0)\right)(f) := \frac{d\,(f\circ\alpha)}{dt}\Big|_{t=0} \quad \forall f \in D_p.$$

↑ $f\circ\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}$ definiert

Ein <u>Tangentialvektor bei</u> $p$ ist der Tangentenvektor in $t=0$ einer Kurve $\alpha$ in $M$ mit $\alpha(0) = p$.

Der <u>Tangentialraum</u> $T_p M$ ist die Menge aller Tangentialvektoren bei $p$.

✓ 11.03.13