91

Dann ist $t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0, \dots 0)$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge &

$$T_{\gamma(t)} S^n = \mathbb{R}(-\sin t, \cos t) \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

der Tangentialraum an S^n in $\gamma(t)$.

Das Geschwindigkeitsvektorfeld ist $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0 \dots 0)$,

d.h.
$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = P_{T_{\gamma(t)} S^n}\left[\gamma''(t)\right]$$

$$= P_{T_{\gamma(t)} S}\left[-(\cos t, \sin t, 0 \dots 0)\right]$$

$$\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Großkreis ist geodätisch.}$$

__Außerdem gilt:__ __Jede__ Geodätische auf S^n ist ein proportional zur Bogenlänge parametrisierter Großkreis.

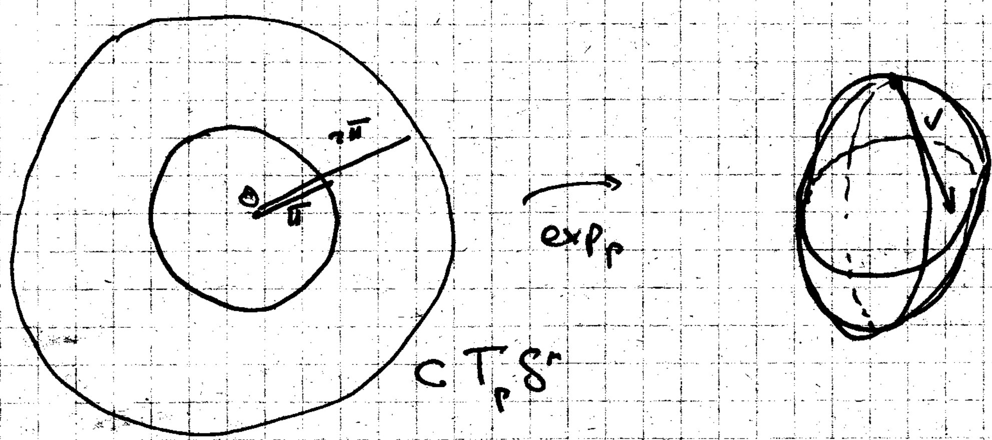
In der Tat, sei $p \in S^n$ und ein Einheitsvektor $v \in T_p S^n$.

Dann ist der Durchschnitt von S^n mit der Ebene durch $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, die p enthält und die den Vektor v enthält ein Großkreis.

Dieser kann als Geodätische durch p mit Geschwindigkeit v parametrisiert werden (prop. Bogenlänge), Eindeutigkeit $\rightsquigarrow$ Beh.

Zu exp.: Betr. $(p,v) \in T_p M$, $\exp_p v \in M$ entsteht, indem man die Geodätische $\gamma(t, p, \frac{v}{|v|})$ von $t=0$ bis $t=|v|$ durchläuft ($\exp_p v$ ist der Endpunkt)

Für $M = S^n$ ist $\exp_p$ <u>auf dem gesamten Tangentialraum definiert</u>



Geometrisch: $\exp_p$ transformiert $B_\pi(0)$ (offen!) in $S^n \sim \{q\}$, wobei $q \in S^n$ der Antipodenpunkt vom p ist.

$\exp_p(\partial B_\pi(0)) = \{q\}$,

die offene Kugelschale $B_{2\pi}(0) - \overline{B_\pi(0)}$ wird (injektiv) transformiert auf $S^n - \{p,q\}$, $\exp_p(\partial B_{2\pi}(0)) = \{p\} \dots$

<u>Bem.</u> Betrachtet man statt dessen die Riemannsche Mgfkt $S^n \sim \{q\}$, d.h. die am Antipodenpunkt punktierte Sphäre, so ist $\exp_p$ nur definiert auf $B_\pi(0) \subset T_p(S^n - \{q\}) = T_p S^n$.

§ 2 Minimierende Eigenschaften von Geodätischen

⇝ Geodätische sind <u>lokal minimierend</u>!

<u>Definition 1.</u> Eine stückweise diff'bare Kurve ist eine stetige Abbildung $c : [a,b] \to M$ eines abgeschlossenen Intervalls $[a,b] \subset \mathbb{R}$ nach M mit: $\exists$ Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$ von $[a,b]$, sodass die Einschränkungen $c_{|[t_i, t_{i+1}]}$ $(i = 0, \ldots, k-1)$ diff'bar sind.

<u>Sprechweisen:</u> c verbindet die Punkte $c(a)$ und $c(b)$,

$c(t_i)$ heißt <u>Ecke</u> von c.

Der Winkel zwischen $\lim_{t \to t_i^+} c'(t)$ & $\lim_{t \to t_i^-} c'(t)$ heißt <u>Eckenwinkel</u> der Ecke $c(t_i)$.

Paralleltransport (vorschiebung) für stückweise diff'bare Kurven:

$V_0 \in T_{c(t_0)} M$: Paralleltransport längs $c_{|[t_0, t_1]}$ ⇝ V_1

$V_1 = V(t_1) \in T_{c(t_1)} M$: längs $c_{[t_1, t_2]}$ ...

Definition 2. Ein Segment einer Geodätische $\gamma: [a,b] \to M$ heißt minimierend, falls

$$\ell(\gamma) \leq \ell(c),$$

wobei $\ell(\cdot)$ die Länge einer Kurve bezeichnet und c eine beliebige stückweise diff'bare Kurve ist, die $\gamma(a)$ & $\gamma(b)$ verbindet.

beachte: parametrisierte Fläche 2d, dann $M = n$

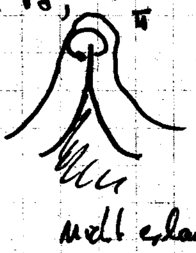
Zudem wird folgende Terminologie benötigt:

Definition 3. Es sei $R \subset \mathbb{R}^2$ zshg, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $U \subset R \subset \bar{U}$, sodass ∂R eine endliche Vereinigung stückweise diff'barer Kurven ist, wobei sich alle Eckenwinkel von π verschieden seien.

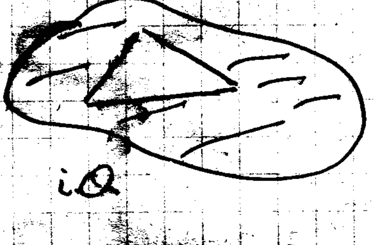
Eine parametrisierte Fläche in M ist dann eine diff'bare Abbildung $s: R \to M$,

(das bedeutet, es existiert eine offene Obermenge von R, auf der s diff'bar ist).

„mit einem Rechtspitzel behaftet"



nicht erlaubt: Diff. der Fkts. nicht eindeutig



Erl.: Kovariante partielle Ableitungen !

Ein Vektorfeld längs einer parametrisierten Fläche s in M

ist eine Abbildung

längs s definiert, tangential zu M, nicht unbed. zu $s(A)$

$$V : A \ni q \longmapsto V(q) \in T_{s(q)} M ,$$

die diff'bar ist im Sinne von: Ist $f \in \mathcal{D}(M)$, so

ist $q \longmapsto V(q) f$ diff'bar.

Es sei (u,v) die kartesischen Koordinaten des $\mathbb{R}^2$.

Für festes v_0 ist die Abbildung $u \longmapsto s(u,v_0)$

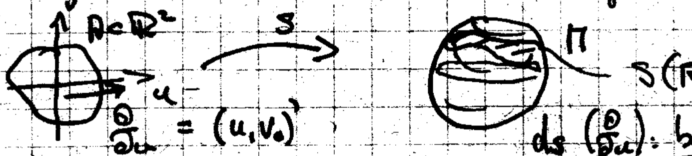
eine diff'bare Kurve in M, falls u in einer

Zusammenhangskomponente von $A \cap \{v = v_0\}$ liegt.

wird hiermit definiert ! ⇐ bisher nicht geklärt, was das sein soll !

$ds\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) =: \frac{\partial s}{\partial u}$ ist ein Vektorfeld längs

dieser Kurve.



$\frac{\partial}{\partial u} = (u,v_0)$

$ds\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$: bel. $f(s(u,v_0))$

Damit ist $\frac{\partial s}{\partial u}$ $\forall\, (u,v) \in A$ definiert & ein $\boxed{\text{Vektorfeld}}$ $\updownarrow$

$\frac{d}{du}\left(f(s(u,v_0))\right)$

bisher $\frac{\partial}{\partial u}$ def. längs s. Analog: $\frac{\partial s}{\partial v}$.

---

neu: $\frac{D}{\partial u}$ def. Ist nun V ein Vektorfeld längs $s : A \to M$, so

ist die kovariante partielle Ableitung $\frac{DV}{\partial u}$ bzw. $\frac{DV}{\partial v}$

wie folgt definiert:

Vektorfeld längs s wird eingeschränkt auf V.F. längs Koordinatenkurve, $\leadsto$ kovariante Abl. definiert. (96)

V wird eingeschränkt auf die Kurve $u \mapsto s(u, v_0)$ und $\frac{DV}{\partial u}(u, v_0)$ ist definiert als die kovariante Ableitung der Einschränkung von V auf diese Kurve.

$\leadsto$ $\frac{DV}{\partial u}(u,v)$ & analog $\frac{DV}{\partial v}(u,v)$ ist $V(u,v) \in M$ def.

Dann gilt

Lemma 1. (Symmetrie)

Es sei M eine diff'bare Mgfkt mit einem symmetrischen Zshg. ∇, $s: A \to M$ sei eine parametrisierte Fläche in M.

Dann gilt $$\frac{D}{\partial v}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right) = \frac{D}{\partial u}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right).$$

Notation Es sei $\underline{x}: \mathbb{R}^n \supset V \to M$ ein Koordinatensystem in der Umgebung eines Punktes $s(A)$. Analog zu V.F. längs Kurven schreibt man

$$(\underline{x}^{-1} \circ s)(u,v) = (x_1(u,v) \dots x_n(u,v)).$$

Beweis des Lemmas. Es sei $\underline{x}: \mathbb{R}^n \supset V \to M$ ein Koordinatensystem in der Umgebung eines Punktes aus $s(\mathbb{R})$. $f \in \mathcal{D}(M)$, $\frac{\partial}{\partial x_i}$

Dann gilt

in Koord. $\frac{d}{du} f(\underline{x}^{-1} \circ s(u,v_0)) = \frac{d}{du} f(x_1(u), \dots x_n(u))$ $= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} = \left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f$

$$\frac{D}{\partial v}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right) = \frac{D}{\partial v}\left(\underbrace{\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_i}}_{\sum v_i X_i = V,\ v^i = \frac{\partial x_i}{\partial u}(u,v)}\right)$$

(2), p. 67 bzw. 66

$$= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial u}}_{v_i} \nabla_{\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$\frac{d}{dv} s(u_0, v)$ in $x^{-1} \circ s$ kovariante Abl. nach v

$$= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

in 2. Term

Linearität bzgl. Multiplikation

Da i & j vertauscht werden können, können ebenso u, v vertauscht werden, d.h. die Behauptung ist bewiesen. $\boxed{B}$

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ da ∇ symm.

Im Folgenden identifiziert man für $v \in T_pM$: $T_v(T_pM) = T_pM$, da T_pM Vektorraum ist. Damit gilt das fundamentale

Gauß-Lemma. Es sei $p \in M$, $v \in T_pM$, sodass $\exp_p(v)$ definiert ist. Für $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$ gilt: Herzstück dieses Kapitels

s.o.

$$\langle (d\exp_p)_v (v), (d\exp_p)_v (w) \rangle = \langle v, w \rangle \qquad (1)$$

" werden in Deutschland gestrichen "

__Beweis.__ w wird in seinen tangentiellen und seinen normalen Anteil bzgl v $(\neq 0)$ zerlegt: $w = w^T + w^N$ mit

$$w^T = \underbrace{\langle w, v\rangle |v|^{-2}}_{=:\lambda_w} v \,, \quad w^N = w - w^T .$$

Da $(d\exp_p)_v$ linear ist, gilt

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w^T)\rangle = \lambda_w \, |(d\exp_p)_v(v)|^2 . \quad (*)$$

Andererseits ist $(d\exp_p)_v(v)$ der Tangentenvektor an die Kurve $\exp_p(tv)$ im Punkte $t=1$. $\left(v = \dot\alpha(t) \text{ mit } \alpha(t) = tv, \leadsto \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)\right)$

Da $t \longmapsto \underset{\gamma(1,p,tv) = \gamma(t,p,v) \text{ Geod.}}{\exp_p(tv)}$ nach Definition Geodätische ist und damit nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt

$$|(d\exp_p)_{\underset{\uparrow t=1}{v}}(v)| = |\overbrace{(d\exp_p)_{\underset{\uparrow t=0}{0}}(v)}^{\mathrm{id}}(v)| = |v| .$$

$$\Rightarrow \langle (d\exp_p)(v), (d\exp_p)_v(w^T)\rangle \overset{(*)}{=} \lambda_w |v|^2 = \langle w, v\rangle = \langle w^T, v\rangle ,$$

also (1) für w^T statt w.

Zu zeigen bleibt (1) für $w = w^N \neq 0$.

Es ist $\exp_p(v)$ wohl definiert (nach Vor.), d.h.

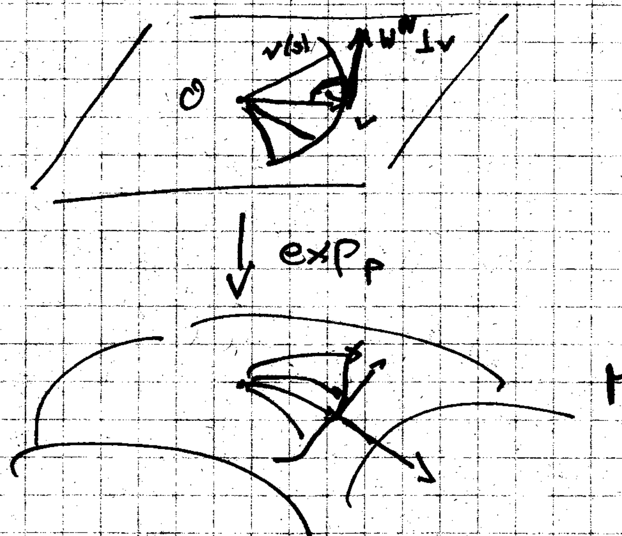
$\exists\ \varepsilon > 0$, sodass $\exp_p(u)$ definiert ist für

$$u = t\, v(\underline{s}), \quad 0 \le t \le 1, \quad -\varepsilon < \underline{s} < \varepsilon$$

2te Richtung

wobei $v(s)$ eine Kurve in T_pM ist mit $v(0) = v$, $v'(0) = w^N$.

$|v(s)| = \text{const}$.



$\rightsquigarrow$ parametrisierte Fläche $\quad f : A \longrightarrow M$

$$A = \{ (t,s) : 0 \le t \le 1, \ -\varepsilon < s < \varepsilon \},$$

gegeben durch $\quad f(t,s) = \exp_p\big(t\, v(s)\big)$.

Dann gilt $\quad \frac{\partial f}{\partial s} = (d\exp_p)|(t v')$

$$\frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{(1,0)} = (d\exp_p)_v (w^N), \quad \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{(1,0)} = (d\exp_p)_v (v) \quad \text{(nach}$$

$t=1$ $s=0$ bei v

und die Kurven $t \longmapsto f(t, s_0)$ sind Geodätische.

s.o.

"t: Man läuft auf der Geodätischen"

"s: $\perp$ s.o."

Aufgrund der Verträglichkeit des Riemannschen Zshgs. mit der Metrik gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle \overset{\text{"Produktregel"}}{=} \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \underbrace{\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}}_{=0,\ \text{"Geodätische Richtung"}}\right\rangle .$$

Weiterhin ist der Levi-Civita-Zshg symmetrisch & Lemma 1 zeigt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\underbrace{\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle}_{\equiv 0,\ \text{da Geod. nach Bogenlänge param.}}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle \text{ ist unabhängig von } t.$$

Aus

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = \underbrace{\lim_{t\to 0} (d\exp_p)_{tv} (t w^N)}_{=0}$$

folgt dann

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{(1,0)} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{(0,0)} = 0.$$

(***) impliziert

$$\langle (d\exp_p)(v), (d\exp_p)(w^N)\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle\Big|_{(1,0)} = 0 = \langle v, w^N\rangle$$

$\Rightarrow$ (1) & das Gauß-Lemma. $\square$