<u>Sprechweise</u>. Es sei V eine Umgebung des Ursprungs in T_pM. Falls $\exp_p : 0 \in V \to U := \exp(V)$ ein <u>Diffeomorphismus</u> ist, so nennt man U eine <u>Normal-Umgebung</u> von p. ⟸ existiert nach §1, Satz 3

Gilt für $B_\varepsilon(0)$: $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, so heißt

$$M \supset B_\varepsilon(p) = \exp_p\left(B_\varepsilon(0)\right)$$

eine <u>Normal-Kugel</u> oder <u>geodätische Kugel</u> mit Zentrum p von Radius ε.

<u>Gauß-Lemma</u> $\Rightarrow$ $\partial B_\varepsilon(p)$ (also der Rand einer Normal-Kugel) ist eine <u>Hyperfläche</u> (Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1) in M, die orthogonal ist zu den von p ausgehenden Geodätischen.

Man nennt $S_\varepsilon(p) := \partial B_\varepsilon(p)$ die <u>Normal-Sphäre</u> bzw. <u>geodätische Sphäre</u> bei p.

Die bei p beginnenden Geodätischen in $B_\varepsilon(p)$ heißen <u>radiale Geodätische</u>.

"Minimierend auf geodätischen Kugeln" (102)

Zur Minimalität Geodätischer:

Satz 1. Es sei $p \in M$, U eine Normal-Umgebung von p und $B \subset U$ eine geodätische Kugel mit Mittelpunkt p.

in B, also lokal:

Weiter sei $\gamma : [0,1] \to B$ ein geodätisches Segment mit $\gamma(0) = p$.

Ist dann $c : [0,1] \to M$ eine beliebige stückweise diff'bare Kurve, die $\gamma(0)$ mit $\gamma(1)$ verbindet, so gilt

$$l(\gamma) \leq l(c).$$

Ist $l(\gamma) = l(c)$, so folgt $\gamma([0,1]) = c([0,1])$.

Beweis. Zunächst sei angenommen $c([0,1]) \subset B$. keine Vor. des Satzes.

Da $\exp_p$ Diffeomorphismus auf U, ist $\tilde{c} = \exp_p^{-1} \circ c$ eine stückweise diff'bare Kurve in T_pM, die im 0 beginnt.

zurückgespr. auf T_pM, radial etc.

Für $t \in [0,1]$ mit $c(t) \neq p$ ($\Leftrightarrow \tilde{c}(t) \neq 0$) setze

$$r(t) = |\tilde{c}(t)|, \quad v(t) = \frac{\tilde{c}(t)}{|\tilde{c}(t)|}.$$

Beachte weiter: $\simeq$ Startpunkt $\gamma(0)$ (evtl. "später starten") $\quad \tilde{c}(1) = \gamma(1)$

evtl. Verschiebung ...

$\tilde{c}^{-1}(0) \subset [0,1]$ abgeschlossen, 1 nicht enthalten,

d.h. $\quad 0 \leq t_1 := \sup \tilde{c}^{-1}(0) = \max \tilde{c}^{-1}(0) < 1.$

Dann ist $c|_{[t_1,1]}$ ebenfalls eine stückweise diff'bare Kurve, die $\gamma(0)$ mit $\gamma(1)$ verbindet.

Zeige o.E. $\quad l(\gamma) \leq l(c|_{[t_1,1]})$ bzw.

o.E. sei $t_1 = 0$, d.h. $c(t) \neq p$ für alle $t \in (0,1]$.

Also ist $r : (0,1] \to \mathbb{R}^+$ stückweise diff'bar und

$v : (0,1] \to T_pM$ eine stückweise diff'bare Kurve mit $|v(t)| = 1$.

Es gilt
$$c(t) = \exp_p(\tilde{c}(t)) = \exp_p(r(t)v(t)).$$

Außer an endlich vielen Stellen gilt also $\quad$ Tangentialvektor an T_pM mit $d\exp_p$

$$\frac{dc}{dt} = (d\exp_p)_{r(t)v(t)}\left(r'(t)v(t) + r(t)v'(t)\right).$$

<u>Gauß-Lemma</u>: $\left|\frac{dc}{dt}\right|^2 = \left|(d\exp_p)_{rv}(r'v + rv')\right|^2$

$$= \left|(d\exp_p)_{rv}(r'v)\right|^2 + 2\left\langle (d\exp)_{rv}(r'v), (d\exp)_{rv}(rv')\right\rangle$$

$$+ \underbrace{\left|(d\exp_p)_{rv}(rv')\right|^2}_{\geq 0 \; (=0 \text{ längs Geod. } v = \text{const})}$$

r herein ziehen

$$\ldots\ldots \geq \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \left|(d\exp_p)_{rv}(rv)\right|^2$$

r nach vorn

$$+ 2r' \left\langle (d\exp_p)_{rv}(rv), (d\exp_p)_{rv}(v') \right\rangle \tag{2}$$

$$= \left(\frac{r'}{r}\right)^2 |rv|^2 + 2r' \langle rv, v' \rangle$$

Mit Gauß-Lemma auf T_pM

$$= \Big(r'^2 \underbrace{|v|^2}_{=1} + 2rr' \underbrace{\langle v, v' \rangle}_{=0,\ \text{da } \langle v, v\rangle = 1} \Big)$$

$$= r'^2 = (r'(t))^2.$$

Es folgt

$$l(c) \geq \int_\varepsilon^1 \left|\frac{dc}{dt}\right| dt \geq \int_\varepsilon^1 |r'(t)|\, dt \tag{2a}$$

$$\geq \int_\varepsilon^1 r'(t)\, dt = r(1) - r(\varepsilon)$$

und mit $\varepsilon \to 0$ zeigt dies wegen $r(0) = |\tilde{c}(0)| = 0$,

$$r(1) = |\tilde{c}(1)| = |\exp_p^{-1}(c(1))| = |\exp_p^{-1}(\gamma(1))|$$

$$= l(\gamma) \qquad (\text{Definition } \exp).$$

$$\underline{\underline{l(c) \geq l(\gamma).}}$$

<u>Gleichheit?</u> Gleichheit genau dann, wenn sowohl in (2) als auch in (2a) die Gleichheit gilt.

(2): Aus Gleichheit folgt

$$\left| (d\exp_p)_{rv} \underbrace{(rv')}_{\text{exp: Diffeom.}}\right|^2 = 0$$

& wegen der Injektivität von $(d\exp_p)_{rv}$

also $v' = 0$, d.h. $\underline{\underline{v = \text{const.}}}$

(2a) Gleichheit bedeutet

$$|r'(t)| = r'(t) \geq 0.$$

wegen $\underline{v = \text{const}}$

Also ist c eine monotone Umparametrisierung von γ und hat damit dieselbe Spur.

Schließlich sei $c([0,1]) \not\subset B$.

δ bezeichne dann den Radius der geodätischen Kugel.

Wegen $\gamma([0,1]) \subset B$ gilt einerseits $\ell(\gamma) \leq \delta$,

andererseits mit

Analog zum Stetpkt: Wann läuft ich zum ersten Mal aus der Kugel

$$t_1 = \inf\{t \in [0,1] : c(t) \in \partial B\} = \min\{\dots\}:$$

$$\ell(c) \geq \ell\left(c_{|[0,t_1]}\right) \geq \delta \geq \ell(\gamma).$$

$\boxed{S}$

<u>Bemerkung.</u> Satz 1 gilt nicht global, d.h. betrachtet man ein hinreichend großes Segment einer Geodätischen, so ist dieses nicht mehr notwendig minimierend.

Beispielsweise sind die Geodätischen auf einer Sphäre, d.h. die Großkreise, nicht mehr minimierend, wenn ein Segment einen Punkt und seinen Antipodenpunkt enthält.

Umkehrung: c minimierend $\Rightarrow$ c Geodätische?

$\leadsto$ Verbesserung von Satz 3, §1, $\leadsto$ Normalumgebungen? *im folg. Semester:*

Ohne Beweis angegeben

<u>Theorem 1.</u> Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Umgebung W von p und ein $\delta > 0$, sodass für jedes $q \in W$ die Abbildung

$$\exp_q : T_qM \supset B_\delta(0) \to \exp_q(B_\delta(0)) \subset M$$

ein Diffeomorphismus ist mit $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$,

d.h.: <u>W ist eine Normalumgebung von q für jedes $q \in W$.</u>

Jeder Punkt p besitzt eine Umgebung W...

"glm. Existenz Geodätische"
vgl. Idee Koroller

früher nur für jedes p, jetzt $\forall q \in W$

<u>Beweis.</u> Es seien $\varepsilon > 0$, V und $\mathcal{U} \subset T\Pi$ [fühl natürlich auf $T\Pi$ gehen $\hookrightarrow V \subset \mathcal{U}$.]

wie im Satz 2, § 1, d.h.: $p \in V \subset \Pi$,

$\mathcal{U} = \{(q,w) : q \in V,\ w \in T_q\Pi,\ |w| < \varepsilon\}$ $\quad \Gamma \leftarrow (p,q)$ für q nahe p

Betrachte $\quad F : \mathcal{U} \to \Pi \times \Pi$, läuft mit exp auf Π, $v=0$: Id.

$$F(q,v) = (q, \exp_q v). \quad \in\Pi$$

Störung der Id $\quad \to$ Diffeomorph. sein.

Es war nach Lemma (Satz 2) $p \in V \subset \underline{x}(U)$,

$(\underline{x}, U)$ Koordinatensystem bei p.

Bei $F(p,0) \in \Pi \times \Pi$ $\quad (p,p)$, $\exp_p(0) = p$ $\quad$ betrachte man das

Koordinatensystem $((\underline{x},\underline{x}), U \times U)$ von $\Pi \times \Pi$.

Bzgl. dieser Koordinaten hat das Differential $dF(p,0)$ $\quad v=0$

als Matrix die Form

Identität der erst. Koord. bzgl. q

q hängt nicht von v ab.

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}.$$

$\exp_q(0) = q$

$d \ldots = I$

$(d\exp_p)_0 = I$

$\hat{F}(v) = \exp_p(v)$

$d\hat{F} : \frac{d}{dt} \exp_p(\alpha)\big|_{t=0}$

$\alpha(t) = tv$

$= d\exp_p(tv)\big|_{t=0}$ ...

$d\hat{F}(\alpha') = v = \alpha'$

$\Rightarrow F$ ist lokaler Diffeomorphismus bei $(p,0)$, d.h.

$\exists$ Umgebung $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ von $(p,0)$ in $T\Pi$, so dass

F die Umgebung ~~...~~ $\mathcal{U}' \subset T\mathcal{U}$ <u>diffeomorph</u> auf eine

Umgebung W' von (p,p) in $\underline{\Pi \times \Pi}$ abbildet.

Evtl. Verkleinerung:

$$\mathcal{U}' = \{(q,v) : q \in V', v \in T_q\Pi, |v| < \delta\} \text{ für}$$

ein $\delta \in (0,\varepsilon)$

$W' \supset W \times W$, wobei $p \in V' \subset V$, $W \subset V'$ Umgeb. von p.

Ist dann $q \in W$ und $B_\delta(0) \subset T_q\Pi$, so ist

$$\underset{\uparrow \text{fest}}{\{q\}} \times \underset{\uparrow \text{Normalumg.}}{W} \subset F\left(\{q\} \times B_\delta(0)\right) \underset{\uparrow \underline{\text{Def. } F}}{=} \{q\} \times \exp_q\left(B_\delta(0)\right) \quad \underline{(*)}$$

da $F(\mathcal{U}') = \bigcup_{q \in V'} F\left(\{q\} \times B_\delta(0)\right) \underset{\uparrow \text{F diffeom. auf } W'}{=} W'$,

$W' \supset W \times W = \bigcup_{q \in W} \{q\} \times W$ & da F bijektiv.

d.h. statt $\bigcup_q$ auch festes q

(*) bedeutet insbesondere die Behauptung $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$,

wobei $\exp_q$ nach Konstruktion ein Diffeom. auf

$B_\delta(0)$ ist

Schneide mit $\{\hat{q}\} \times W$

$\square$

Bemerkung. Theorem + Minimalität Geodätische:

Zu zwei vgl. Punkten $q_1, q_2 \in W$ gibt es eine eindeutig bestimmte minimierende Geodätische γ der Länge $< \delta$, die q_1 mit q_2 verbindet. angeben ?

Aus dem Beweis des Theorems ergibt sich weiter: γ hängt im folgenden Sinne diff'bar von (q_1, q_2) ab:

Gegeben (q_1, q_2), so existiert ein eindeutiges $v \in T_{q_1} M$ (vgl. durch $F^{-1}(q_1, q_2) = (q_1, v)$), das diff'bar von (q_1, q_2) abhängt mit $\gamma'(0) = v$.

Bezeichnung. W heißt auch totale Normal-Umgebung von $p \in M$.

ohne Beweis angeben

Korollar. Ist eine stückweise diff'bare Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ proportional zur Bogenlänge parametrisiert und minimiert γ die Länge zwischen $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$, so ist γ eine Geodätische (und insbesondere regulär).

Das ist jetzt die Umkehrung: in diesem Sinne minimierend => Geod.