| Idee: lokal totale normale Umgebung, die kann mit Geod. verbunden werden, die sind minimierend... |

Beweis. Zeige, γ ist in jedem $t \in [a,b]$ geodätisch.

Sei also $t \in [a,b]$ und W eine totale Normal-Umgebung von $\gamma(t)$.

Dann gibt es ein nicht-degeneriertes abgeschlossenes Intervall $I \subset [a,b]$ mit $t \in I$ & $\gamma(I) \subset W$.

Die Einschränkung $\gamma_{|I} : I \to W$ ist dann eine stückweise diff'bare Kurve, die zwei Punkte einer geodätischen Kugel B (oE. $W = B$) verbindet.

γ minimiert die Länge (natürlich auch lokal), d.h. nach Satz 1, da die beiden Punkte mit einer Geodätischen verbunden werden können, dass $l(\gamma)$ gleich der Länge einer radialen Geodätischen ist, die diese beiden Punkte verbindet.

bzgl. z.B. Tangentialraum über Startpkt und exp.

$\gamma_{|I}$ proportional zu Bogenlänge & Beweis Satz 1

$\Rightarrow$ γ ist in dem Teil eine streng monotone Umparametrisierung der radialen Geodätischen & damit Geodätisch. $\square$

§3 Konvexe Umgebungen

Zwei Punkte q_1, q_2 aus einer totalen Normal-Umgeb. von p können immer durch eine minimierende Geodätische der Länge $< \delta$ verbunden werden.

Diese Geodätische muss aber nicht ganz in W verlaufen. $(W \subset \exp_q(B_\delta(0)))$

(⇝ z.B. im Kontrast kleine Umgebung um einen Pkt)

Motivation für:

Ziel angeben

⇒ Satz

Eine Teilmenge $S \subset M$ heißt streng konvex, falls gilt:

Zu je zwei Punkten $q_1, q_2 \in \bar{S}$ (– Abschluss) gibt es eine eindeutig bestimmte minimierende Geodätische, die q_1 und q_2 verbindet und deren Inneres in S liegt.

← vgl. Def. Konvexität

Bsp S^n p. 117

total geodätische Kugel ⟸ strenge Konvexität ⇝ Vorbereitung,

Lemma 1. Zu jedem $p \in M$ gibt es ein $c > 0$, sodass jede Geodätische in M, die in $q \in M$ tangential zur geod. Sphäre $S_r(p)$ mit $r < c$ ist, in einer Umgebung von q vollst. außerhalb von $B_r(p)$ bleibt.

tangential möglich, krümmt aber nicht rein.

<u>Beweis.</u> Wähle nach §2, Thm 1., eine totale Normal-Umgebung W von p.

Homogenitätslemma: O.E. werden alle Geodätischen in W mit der Geschwindigkeit 1 durchlaufen (evtl. Verkleinerung des Definitionsintervalls).

$\rightsquigarrow$ Betr. das <u>Einheitstangentialbündel</u>

$$T_1 W = \{ (q,v) : q \in W,\ v \in T_q M,\ |v| = 1 \}.$$

Verwende von Satz 2, §2: statt $|v| <$ ein kleines (glm.) Zeitintervall

Es sei nun $\underset{\smile}{\gamma} : I \times T_1 W \to M$, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, die diff'bare Abbildung, sodass $t \longmapsto \gamma(t,q,v)$ die Geodätische ist, die zur Zeit $t=0$ mit der Geschwindigkeit v ($|v|=1$) durch q geht.

Setze $$\underset{\in T_p M}{u(t,q,v)} := \exp_p^{-1}\left(\gamma(t,q,v)\right)$$ p!

und definiere $$F : I \times T_1 W \to \mathbb{R}$$ $$F(t,q,v) = |u(t,q,v)|^2,$$

d.h. F <u>misst das Quadrat des "Abstandes" von p zu einem Punkt, der sich auf der Geodätischen γ bewegt.</u>

Offenbar: u, F diff'bar.

Es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u\right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 2\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u\right\rangle + 2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2.$$

Wähle dann $r > 0$ mit

geodätische Kugel in total normaler Umgeb.

$$\exp_p(B_r(0)) = B_r(p) \subset W.$$

Ist dann eine Geodätische γ tangential zu geod. Sphäre $S_r(p)$ im Punkt $q = \gamma(0,q,v)$, so folgt aus dem Gauß Lemma, dass u (als Fkt von t) tangential ist zu $\partial B_r(0)$ in $u(0,q,v) = \exp_p^{-1}(\underbrace{\gamma(0,q,v)}_{q})$,

d.h. es gilt

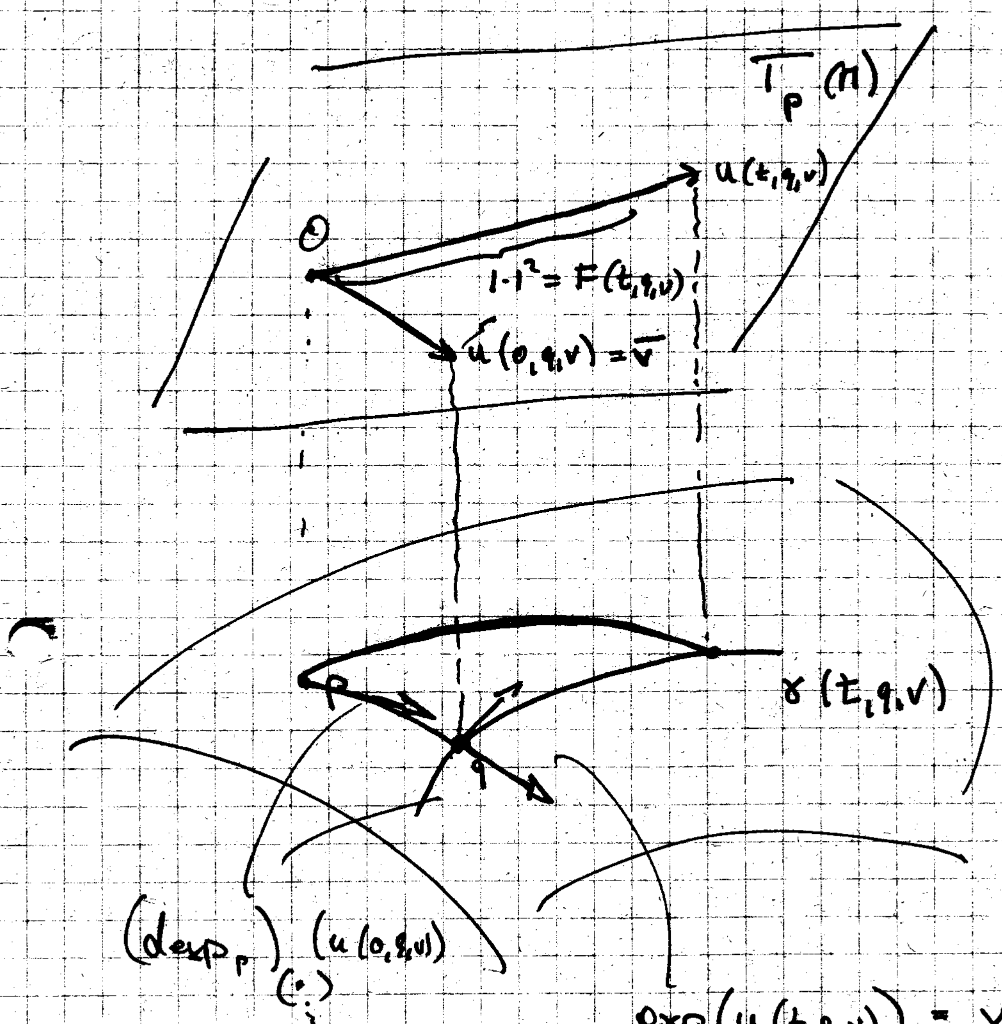
$$\frac{\partial F}{\partial t}(0,q,v) = 2\underbrace{\left\langle u(0,q,v), \frac{\partial u}{\partial t}(0,q,v)\right\rangle}_{\text{Gauß Lemma}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } \gamma \text{ tang. zu geod. Sph.}}}{\overset{\text{Abb.}}{=}} 0$$

$$= \left\langle (d\exp_p)_{u(0,q,v)}(u(0,q,v)), (d\exp_p)_{u(0,q,v)}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(0,q,v)\right)\right\rangle$$

$\boxed{\hat{=}\ v \text{ im Gauß Lemma}}$

Differential des Tangentenvektors an die radiale Geod. von p durch q

$\longrightarrow$ Abbildung.



bel. radiale Geod. durch p in Richtung $\bar v$ mit

$$\gamma(1,p,\bar v) = q$$
$$\parallel$$
$$\exp_p(\bar v)$$

$$\Rightarrow \exp_p^{-1}(\gamma(1,p,\bar v)) = \underline{\bar v} = \exp_p^{-1}(q) = \underline{\underline{u(0,q,v)}}$$

$$\exp(\underset{\uparrow}{u(t,q,v)}) = \underset{\uparrow}{\gamma(t,q,v)}$$

in Abh. von t Geod.

$$d\exp_p\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\gamma(t,q,v)$$

Bel. Für r hinreichend klein ist der kritische Pkt $(0,q,v)$ von F ein <u>striktes Minimum</u>. (Beachte: Die Behauptung impliziert das Lemma)

Bew. Für $q = p$ gilt

$$u(t,p,v) = \exp_p^{-1}(\gamma(t,p,v)) = \exp_p^{-1}(\gamma(1,p,tv)) = \underline{\underline{tv}}$$

$$F(t,p,v) = t^2 \underset{\substack{\uparrow \\ |v|=1 \text{ s.o.}}}{|v|^2} = t^2,$$

d.h. $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(0,p,v) = 2.$

D.h. wiederum, es gibt eine Umgebung $V \subset W$ von p, so dass $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(0,q,v) > 0 \quad \forall q \in V, \ \forall v \in T_q M, \ |v| = 1.$

Wähle weiter $\varepsilon > 0$ hinreichend klein mit

$$\exp_p(B_\varepsilon(0)) \subset V.$$

Aus den obigen Überlegungen folgt, dass jede Geodätische in $B_\varepsilon(p)$, die tangential an eine geodätische Sphäre $S_r(p)$ mit $r < \varepsilon$ im Punkt $\gamma(0,q,v)$ ist, ein striktes Minimum ($\frac{\partial^2}{\partial t^2} > 0$) von F in $(0,q,v)$ liefert, d.h. $F(t,q,v) > r^2 = F(0,q,v)$ für $0 \neq t \in I$.

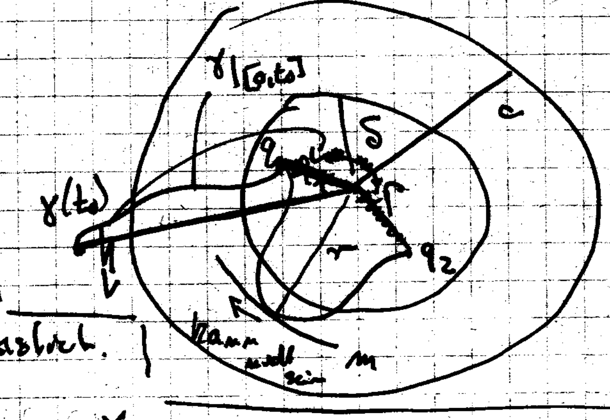
$\Rightarrow \gamma(t,q,v)$ bleibt in einer Umgebung von q außerhalb von $B_r(p)$. $\boxed{}$

Satz 1. (Existenz konvexer Umgebungen).

Zu jedem $p \in M$ gibt es ein $\beta > 0$, sodass die geodätische Kugel $B_\beta(p)$ streng konvex ist.

Beweis. Es sei $c = c(p)$ wie in Lemma 1.
Wähle $\delta > 0$ & W nach Theorem 1, §2 (totale Normal-Umg.), wobei $\delta < \frac{c}{2}$ sei und wähle dann $\beta < \delta$ mit $B_\beta(p) \subset W$. Dann ist $B_\beta(p)$ streng konvex, denn:

Es seien $q_1, q_2 \in \overline{B_\beta(p)}$ und γ die eindeutig bestimmte Geod. der Länge $< \delta < c/2$, die q_1 und q_2 verbindet. ($\leadsto$ Bem. nach Theor.).



Dann ist γ enthalten in $B_c(p)$, da sonst t_0 mit $\gamma(t_0) \notin B_c(p)$ existiert.

Betr. dann die radiale Geodätische γ_0 von p nach $\gamma(t_0)$ und γ_1 von p nach q_1. Es folgt

$$c < l(\gamma_0) \le \underbrace{l(\gamma_1)}_{\le \beta,\ q_1 \in \overline{B_\beta}} + \underbrace{l(\gamma|_{[0,t_0]})}_{<\delta,\ \text{ein Bogen kleiner als } \delta} < \beta + \delta < 2\delta < c$$

Ist das Innere von γ nicht enthalten in $B_\rho(p)$, so gibt es einen inneren Pkt $m \in spur(\gamma)$, der maximalen Abstand r von p hat, d.h.

$m \in S_r(p)$, $\gamma(t) \in \overline{B_r(p)}$ $\forall t$. ↯ Lemma 1.

Bem. Nicht jede solche geodätische Kugel muss streng konvex sein.

Man betr. beispielsweise $M = S^n$, den Nordpol $p = (0,0,\dots,0,1)$ und $B_{\pi/2}(p)$ (Thm 1, §2: $W = B_{\pi/2}(p)$, $\delta = \pi$).

Aber $B_{\pi/2}(p)$ ist nicht streng konvex. Sind nämlich $q_1 \neq q_2$ aus dem Äquator $\partial B_{\pi/2}(p)$ und q_2 nicht Antipodenpunkt von q_1, so gibt es genau eine minimierende Geodätische, die q_1 und q_2 verbindet.

Diese verläuft also ganz auf dem Äquator, insbesondere nicht im Inneren von $B_{\pi/2}(p)$.