Kap. 5 Krümmung

1760 L. Euler: Normalschnitte, Hauptkrümmungen

1776 J.B. Meusnier: Normalkrümmung hängt nur ab von Tangente

1827 C.F. Gauß: (Gaußsche) Krümmung hängt nur ab

vom der Metrik (1. Fundamentalform)

~> alles für reg. Flächen $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

1854 Georg Friedrich Bernhard Riemann (10. Juni 1854)

Habilitationsvortrag: "Über die Hypothesen, welche

der Geometrie zu Grunde liegen".

Verallgemeinerung der Gaußschen Krümmung

auf höherdimensionale (Riemannsche) Mannigfaltigkeiten.

Idee: $p \in M$, $\sigma \subset T_pM$ 2-dim Teilraum

$\rightsquigarrow \exp_p(\sigma \cap B_r(0)) \subset M$

ist 2-dim Untermgfkt von M mit

Gauß-Kr. $K(p,\sigma)$

heute: $K(p,\sigma)$ = Schnittkrümmung.

1869 E.B. Christoffel: Berechnung der Schnittkrümmung aus

der Metrik

formale Einführung vgl. Kap. 5

§ 1 Krümmung

Definition 1. Die Krümmung R einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist die Abbildung

$$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \ni (X,Y) \longmapsto R(X,Y) \in (\mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)),$$

definiert durch $(Z \in \mathcal{X}(M))$

In der Literatur manchmal anderes Vorzeichen

Krümmung immer was mit 2ten Ableitungen

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

wobei ∇ den Levi-Civita-Zshg. auf M bezeichnet.

Bsp. $M = \mathbb{R}^n$. Der $\mathbb{R}^n$ sollte nicht gekrümmt sein,

d.h. für beliebige V.F.en sollte gelten $R(X,Y)Z = 0$.

Hier ist ∇_X die übliche Ableitung (vgl. Kap. 3), in Richtung des VFs X, d.h.

ist $Z = (z_1, \dots, z_n)$, so folgt

$$\nabla_X Z = (X z_1, \dots, X z_n), \quad \nabla_Y \nabla_X = (YX z_1 \dots YX z_n),$$

und somit

$$R(X,Y)Z = \big((YX - XY) z_1, \dots, (YX - XY) z_n \big) + \big(\overset{XY-YX}{[X,Y]} z_1, \dots, [X,Y] z_n \big) = 0.$$

∎

<u>Bemerkungen.</u> i.) R "misst" in gewissem Sinne die Abweichung vom Euklidischen Raum.

ii.) Im Koordinaten $\{x_i\}$ bei $p \in M$ schreibt sich R:

$$\underline{R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}}, \quad (1)$$

da $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$.

Also misst die Krümmung die <u>Nicht-Kommutativität der kovarianten 2ten Ableitungen.</u>

<u>Fundamentale Eigenschaften der Krümmung.</u>

<u>Satz 1.</u> i.) R ist bilinear auf $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, d.h.

$$R(f X_1 + g X_2, Y_1) = f R(X_1, Y_1) + g R(X_2, Y_1),$$

hier, im der Ableitungsrichtung linear

$$R(X_1, f Y_1 + g Y_2) = f R(X_1, Y_1) + g R(X_1, Y_2)$$

für $f, g \in \mathcal{D}(M)$, $X_i, Y_i \in \mathcal{X}(M)$, $i = 1, 2$.

ii.) Für beliebige $X, Y \in \mathcal{D}(M)$ ist der Krümmungsoperator $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ ein <u>linearer Operator</u>, d.h.

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)(fZ) = f R(X,Y) Z \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(M),\ W, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Beweis. i.) : Übung, erster Teil ii.) ✓.

/ Eigenschaften Zshg.

Es gilt
$$\nabla_Y \nabla_X (fZ) = \nabla_Y \left(f \nabla_X Z + X(f) Z \right)$$
$$= f \nabla_Y \nabla_X Z + Y(f) \nabla_X Z + Y(X(f))$$
$$+ X(f) \nabla_Y Z.$$

D.h.
$$\nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_X \nabla_Y (fZ)$$
$$= f \left(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z \right) + \left((YX - XY)(f) \right) Z.$$

Es folgt
$$R(X,Y)(fZ) = f \left(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z \right)$$
$$+ \left([Y,X](f) \right) Z$$
$$+ \left(\underbrace{[X,Y](f) Z + f \nabla_{[X,Y]} Z}_{\nabla_{[X,Y]} fZ} \right)$$
$$= f \; R(X,Y) Z \qquad \boxed{}$$

Beobachtung: Nach den bisherigen Bemerkungen war der Term $\nabla_{[X,Y]} Z$ in der Definition von R nicht motiviert und hätte weggelassen werden können.

Hier erkennt man: Dieser Term erzwingt genau die Linearität von R ($\rightsquigarrow$ Definition Tensor)

Satz 2. (Bianchi Identität)

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Beweis. Die Symmetrie des Levi-Civita Zshgs ($\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$) impliziert

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y$$

$$= \underbrace{\nabla_Y \nabla_X Z}_{} - \underbrace{\nabla_X \nabla_Y Z}_{} + \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$+ \underbrace{\nabla_Z \nabla_Y X}_{} - \underbrace{\nabla_Y \nabla_Z X}_{} + \nabla_{[Y,Z]} X$$

$$+ \underbrace{\nabla_X \nabla_Z Y}_{} - \underbrace{\nabla_Z \nabla_X Y}_{} + \nabla_{[Z,X]} Y$$

$\underbrace{\quad}$: $\nabla_Y [X,Z]$

$\underbrace{\quad}$: $\nabla_X [Z,Y]$

$\underbrace{\quad}$: $\nabla_Z [Y,X]$

$$= \nabla_Y [X,Z] + \nabla_Z [Y,X] + \nabla_X [Z,Y]$$

$$- \nabla_{[Y,X]} Z - \nabla_{[Z,Y]} X - \nabla_{[X,Z]} Y$$

neg. Vorzeichen
da Komm. in andere Reihenfolge

$$= [Y,[X,Z]] + [Z,[Y,X]] + [X,[Z,Y]]$$

Jacobi-Identität für V.F., p. 35.

$$= 0$$

∎

⇝ Vertauschen der VFe.

Satz 3.

i.) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle + \langle R(Y,Z)X,T\rangle + \langle R(Z,X)Y,T\rangle = 0$

ii.) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = -\langle R(Y,X)Z,T\rangle$

iii.) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = -\langle R(X,Y)T,Z\rangle$

iv.) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(Z,T)X,Y\rangle$

Bew. i.): Bianchi-Identität

ii.) folgt unmittelbar aus der Definition.

iii.) $\iff \langle R(X,Y)Z,Z\rangle = 0$

($\Rightarrow$ ✓
$\Leftarrow$: bil. $\underbrace{\langle R(X,Y)(T+Z),(T+Z)\rangle}_{=0} = \langle R(X,Y)T,Z\rangle + \langle R(X,Y)Z,T\rangle$)

Bew. $\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = 0$:

$$\| $$

$$\langle \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle.$$

Es ist $\langle \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle = Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle$ ← Produktreg.

und $\langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle = \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle$

fällt gg. andern Term weg

$\Rightarrow \langle R(X,Y)Z,Z\rangle = Y\langle \nabla_X Z,Z\rangle - X\langle \nabla_Y Z,Z\rangle$ ← analog

$+ \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle$

$= \dots$

$$= \langle \nabla_X Z, Z\rangle + \langle Z, \nabla_X Z\rangle$$

$$\ldots = \frac{1}{2} Y \left(X \langle Z,Z\rangle \right) - \frac{1}{2} X \left(Y \langle Z,Z\rangle \right)$$

$$+ \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z,Z\rangle$$

$$= -\frac{1}{2} [X,Y] \langle Z,Z\rangle + \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z,Z\rangle = 0.$$

iv.) 4 malige Anwendung der Bianchi-Identität

$$① \quad \langle R(X,Y)Z,T\rangle + \underset{-②}{\langle R(Y,Z)X,T\rangle} + \underline{\langle R(Z,X)Y,T\rangle} = 0$$

$$② \quad \langle R(Y,Z)T,X\rangle + \underset{-③}{\langle R(Z,T)Y,X\rangle} + \langle R(T,Y)Z,X\rangle = 0$$

$$③ \quad \langle R(Z,T)X,Y\rangle + \underset{-④}{\langle R(T,X)Z,Y\rangle} + \underline{\langle R(X,Z)T,Y\rangle} = 0$$

$$④ \quad \langle R(T,X)Y,Z\rangle + \underset{-①}{\langle R(X,Y)T,Z\rangle} + \langle R(Y,T)X,Z\rangle = 0$$

Summe & beachte iii.) $\Rightarrow$

$$2 \cdot \underline{\langle R(Z,X)Y,T\rangle} + 2 \langle R(T,Y)Z,X\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle R(Z,X)Y,T\rangle = \langle R(Y,T)Z,X\rangle \Rightarrow \text{iv.)} \quad \square$$

Fundamentale Eigenschaften (s.o.) bzgl. eines

Koordinatensystems (x,U) bei $p \in M$?

Wie üblich sei $\underline{X}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Setze $\underbrace{R(\underline{X}_i, \underline{X}_j)\underline{X}_k}_{V.F.} = \underbrace{\sum_l R^l_{ijk}\,\underline{X}_l}_{\text{Darstellung bzgl. Basis}}$,

d.h. $\{R^l_{ijk}\}$ sind die Komponenten der Krümmung

bzgl. (x, U).

Es sei $\underline{X} = \sum_i u^i \underline{X}_i$, $\underline{Y} = \sum_j v^j \underline{X}_j$, $Z = \sum_k w^k \underline{X}_k$.

Die (Bi-) Linearität von R impliziert

$$R(\underline{X}, \underline{Y})Z = \sum_{ijkl} \left\{ R^l_{ijk} u^i v^j w^k \right\} \underline{X}_l . \qquad (2)$$

<u>R^l_{ijk} in Abhängigkeit von den Christoffel-Symbolen?</u>

Es ist (Erinnerung $[\underline{X}_i, \underline{X}_j] = 0$)

$$R(\underline{X}_i, \underline{X}_j)\underline{X}_k = \nabla_{\underline{X}_j}\nabla_{\underline{X}_i}\underline{X}_k - \nabla_{\underline{X}_i}\nabla_{\underline{X}_j}\underline{X}_k$$

$$\sum_l \Gamma^l_{ik}\nabla_{\underline{X}_j}\underline{X}_l = \sum_l \Gamma^l_{ik}\sum_m \Gamma^m_{jl}\underline{X}_m = \nabla_{\underline{X}_j}\Big(\sum_l \Gamma^l_{ik}\underline{X}_l\Big) - \nabla_{\underline{X}_i}\Big(\sum_l \Gamma^l_{jk}\underline{X}_l\Big).$$

$+\ \underline{X}_j\Big(\sum_m \Gamma^m_{ik}\Big)\underline{X}_m$ — vgl. Def. Christoffel-Symb. p. 65.

Direkte Rechnung zeigt

$$\underline{R^m_{ijk}} = \underline{\sum_l \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^m_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^m_{jk}} \qquad (3)$$

Setze schließlich

$\langle\cdot,\cdot\rangle \Leftrightarrow g_{\ell m}$

$$\langle R(X_i,X_j)X_k, X_m\rangle = \sum_\ell R^\ell_{ijk}\, g_{\ell m} =: R_{ijkm}.$$

Dann lautet Satz 3 in Koordinaten:

$$R_{ijkm} + R_{jkim} + R_{kijm} = 0, \qquad \text{(i.)}$$

$$R_{ijkm} = -R_{jikm}, \qquad \text{(ii.)}$$

$$R_{ijkm} = -R_{ijmk}, \qquad \text{(iii.)}$$

$$R_{ijkm} = R_{kmij}. \qquad \text{(iv.)}$$

Bemerkung. Die Gleichung (2) folgt aus der *Linearität* von R und besagt: $(R(X,Y)(Z))(p)$ ist eindeutig bestimmt durch die Werte $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$ und die Werte $R^\ell_{ijk}(p)$. Das steht im Gegensatz zum Verhalten der kovarianten Ableitung ($\rightsquigarrow$ Terme $X(Y_m)$). Grund: ∇ ist *nicht linear* bzgl. jedes Argumentes. Größen wie die Krümmung, die bzgl. jedes Argumentes *linear* sind, heißen *Tensoren auf M*, R heißt auch *Krümmungstensor*.