§2 Die Schnittkrümmung (oder Riemannsche Krümmung)

Im folgenden sei für einen Skalarproduktraum V und $x, y \in V$

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

der Flächeninhalt des 2 dim. Parallelogramms, welches von x und y aufgespannt wird.

__Satz 1.__ Es sei $\sigma \subset T_p M$ ein 2-dim. Unterraum des Tangentialraums und $x, y \in \sigma$ seien linear unabhängig. Dann ist

$$K(x,y) := \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2}$$

Beispiel: Krümmung ~~einer~~ von Kurve allein zu Beschreibung d. Krümmung von M ungeeignet, 2-dim. Bed. abzuschätzen vgl. z.B. Schwarzschild etc.

unabhängig von der Wahl von x & y, d.h. $K(x,y) = K(\sigma)$.

__Beweis.__ Es gilt trivial:

$$K(x,y) = K(y,x), \qquad \text{(i.)}$$

$$K(x,y) = K(\lambda x, y), \qquad \text{(ii.)}$$

$$K(x,y) = K(x + \lambda y, y). \qquad \text{(iii.)}$$

$\Big(\langle R(x+\lambda y, y)(x+\lambda y), y\rangle = \langle R(x,y)x, y\rangle + \lambda \langle \underbrace{R(y,y)x, y}_{=0}\rangle + \lambda \langle \underbrace{R(x+\lambda y, y)y, y}_{=0}\rangle$

& $|x \wedge y| = |(x+\lambda y) \wedge y|.\Big)$

Es seien nun $\{x,y\}$, $\{x',y'\}$ zwei Basen von T_pM, wobei gelte

$$x' = \lambda_1 x + \mu_1 y,$$

$$y' = \lambda_2 x + \mu_2 y.$$

Dann ist

$$\underline{K(x',y')} = K(\lambda_1 x + \mu_1 y, \lambda_2 x + \mu_2 y)$$

sonst deshalb $k \leftrightarrow y$ $\longrightarrow$ O.E. $\mu_2 \neq 0$

$$= K\left(\lambda_1 x + \mu_1 y - \frac{\mu_1}{\mu_2}(\lambda_2 x + \mu_2 y), \lambda_2 x + \mu_2 y\right)$$

$$= K\Big(\underbrace{\left(\lambda_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda_2\right)}_{\neq 0 \text{ sonst } x' = \lambda_1 x + \mu_1 y = \lambda_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} x + \mu_1 y = \frac{\mu_1}{\mu_2}(\lambda_2 x + \mu_2 y) = \frac{\mu_1}{\mu_2} y'} x, \lambda_2 x + \mu_2 y\Big)$$

$$\overset{(iii)}{=} K(x, \lambda_2 x + \mu_2 y)$$

$$\overset{(i)}{=} K(\mu_2 y + \lambda_2 x, x) \overset{(iii)}{=} K(\mu_2 y, x)$$

$$= K(y,x) = \underline{K(x,y)}.$$

Definition 1. Ist $p \in M$ & $\sigma \subset T_pM$ [B]

ein 2-dim. Unterraum, so heißt ($\{x,y\}$ Basis von σ)

$$K(\sigma) := K(x,y)$$

die Schnittkrümmung von σ bei p.

„normierter Krümmungstensor von x, y.

<u>Bemerkungen</u> i.) Die geometrische Interpretation der Schnittkrümmung folgt.

ii.) Besondere Bedeutung der Schnittkrümmung:

Die <u>Kenntnis aller Schnittkrümmungen in einem Punkt p bestimmt bereits den gesamten Krümmungstensor.</u>

<u>Lemma 1.</u> ← rein algebraisch

Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum der Dimension ≥ 2. Weiter seien $R, R' \;\; V \times V \times V \to V$ trilineare Abbildungen, sodass für R und R' die Bedingungen (i.) – (iv.) aus Satz 3, §1, erfüllt sind.

<u>Notation.</u> $(x,y,z,t) := \langle R(x,y)z, t\rangle$, $(x,y,z,t)' = \langle R'(x,y)z,t\rangle$,

für x, y mit $\sigma = \operatorname{Span}\{x,y\}$:

$$K(\sigma) := \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2}, \quad K'(\sigma) := \frac{(x,y,x,y)'}{|x \wedge y|^2}.$$

Ist dann für alle 2-dim. U.R. $\sigma \subset V$ $\;K(\sigma) = K'(\sigma)$, so gilt

$$R = R'.$$

Beweis. Das Lemma folgt, falls $\forall x, y, z, t \in V$

$$(x, y, z, t) = (x, y, z, t)' .$$

(folgt aus Basisdarstellung)

$K(\sigma) = K'(\sigma)$

Nach Voraussetzung ist

$$(x, y, x, y) = (x, y, x, y)' \quad \forall x, y \in V.$$

Also gilt auch

$$(x+z, y, x+z, y) = (x+z, y, x+z, y)',$$

$\hookrightarrow (x,y,x,y), (x,y,z,y), (z,y,x,y), (z,y,z,y)$

sodass

$$(x, y, x, y) + 2(x, y, z, y) + (z, y, z, y) =$$

$$= (x, y, x, y)' + 2(x, y, z, y)' + (z, y, z, y)'$$

und es folgt

$$(x, y, z, y) = (x, y, z, y)' \quad \forall x, y, z \in V.$$

Das impliziert

$(x,y,z,t), \underbrace{(x,y,z,y)}_{\text{mit }(\,)'\text{ gleich}}, (x,t,z,y), (x,t,z,t)$

$$(x, y+t, z, y+t) = (x, y+t, z, y+t)',$$

also $\quad (x, y, z, t) + (x, t, z, y) = (x, y, z, t)' + (x, t, z, y)'$

bzw. $\quad (x, y, z, t) - (x, y, z, t)' = (y, z, x, t) - (y, z, x, t)'$

$$= (z, x, y, t) - (z, x, y, t)'$$

D.h. $(x, y, z, t) - (x, y, z, t)'$ ist invariant unter zyklischen Permutationen ~~des~~ der ersten drei Komponenten.

i.) $\Rightarrow$ $3\{(x,y,z,t)-(x,y,z,t^{*})'\}=0$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y,z,t) = (x,y,z,t)' \quad \forall x,y,z,t\in V.$$

$\boxtimes$

Riemannsche Mgfkt. konstanter Schnittkrümmung:

Charakterisierung über die R_{ijkl}.

Lemma 2. Es sei M eine Riemannsche Mgfkt. und $p\in M$. Definiere $R': T_pM\times T_pM\times T_pM \to T_pM$ durch

$$\langle R'(X,Y,W), Z\rangle = \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle$$

$$\forall X,Y,Z,W\in T_pM$$

Dann hat M genau dann konstante Schnittkrümmung $\equiv K_0$, wenn gilt $R = K_0 R'$, wobei R den Krümmungstensor von M bezeichnet.

$\to$ vgl. isotrop (Übg. ... dafür)

Beweis. Es sei $K(p,\sigma) = K_0 \;\forall \sigma\subset T_pM$.

Beobachtung: R' $(R'(X,Y,W) = R'(X,Y)W)$ erfüllt alle Bedingungen aus Satz 3, § 1.

Aus $\langle R'(X, Y, X), Y\rangle = |X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2$

folgt für beliebige $X, Y \in T_pM$

$$\langle R(X,Y)X,Y\rangle = K_0\left(|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2\right)$$

$$= K_0 \langle R'(X,Y,X), Y\rangle .$$

Lemma 1 $\Rightarrow$ $\langle R(X,Y)W, Z\rangle = K_0 \langle R'(X,Y,W), Z\rangle$

d.h. $R = K_0 R'$.

hinschreiben

Der Umkehrung des Lemmas ist trivial. $\boxed{X}$

Korollar. Es sei M Riemannsche Mgfkt., $p \in M$ und

$\{e_1 \dots e_m\}$ ONB von T_pM. vgl. Def. p. 126

Setze $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l\rangle$ $i,j,k,l = 1 \dots m$.

Dann ist

$$K(p,\sigma) \equiv K_0(p) \quad \forall \sigma \subset T_pM$$

genau dann, wenn

$$R_{ijkl} = K_0 \big(\underbrace{\delta_{ik}\delta_{jl}}_{\neq 0:\ i=k,\, j=l} - \underbrace{\delta_{jk}\delta_{il}}_{j=k\ i=l\ \to\ j=i:\ 0}\big).$$

Mit andern Worten:

$$K(p,\sigma) \equiv K_0(p)\ \forall \sigma \subset T_pM = \begin{cases} R_{ijij} = -R_{ijji} = K_0 & i \neq j \\ R_{ijkl} = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

§3 Ricci-Krümmung & Skalarkrümmung

Gewisse Kombinationen der Schnittkrümmungen haben besondere geometrische Bedeutung & treten häufig auf.

Es sei $x \; (=z_m) \in T_pM$ ein Einheitsvektor, $|x|=1$.

x werde durch $\{z_1, \dots, z_{m-1}\}$ zu einer ONB $\{z_1 \dots z_m\}$ von T_pM ergänzt.

Betr. folgende Mittel der Schnittkrümmungen $(\sigma_{ij} = \operatorname{span}\{z_i, z_j\})$.

$$\operatorname{Ric}_p(x) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} K(\sigma_{im})$$

<u>Ricci-Krümmung in Richtung x</u>;

$$S(p) := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Ric}_p(z_j) = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \neq j} K(\sigma_{ij})$$

<u>Skalarkrümmung</u>.

Es wird noch gezeigt, dass $\operatorname{Ric}_p(x)$ und $S(p)$ nicht von der Wahl der ONB abhängen.

<u>Intrinsische Definition</u> Definiere eine Bilinearform Q auf T_pM. (unabh. von der Basiswahl s.u.)

$$T_pM \times T_pM \ni (x,y) \mapsto Q(x,y) = \text{Spur der Abbildung } \begin{array}{l} z \mapsto R(x,z)y \\ T_pM \to T_pM. \end{array}$$

Ist $x \in T_pM$, $|x| = 1$, und wird $x = z_n$ zu einer ONB $\{z_1, \dots, z_n\}$ von T_pM ergänzt, so gilt (<u>Def. Spur</u>)

$$Q(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(x,z_i)y, z_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R(y,z_i)x, z_i \rangle$$

$$= Q(y,z),$$

d.h. Q ist <u>symmetrisch</u> und es gilt

$$Q(x,x) = (n-1)\,\mathrm{Ric}_p(x),$$

~~was~~ womit $\mathrm{Ric}_p(x)$ intrinsisch definiert ist.

Andererseits entspricht der symmetrischen Bilinearform Q auf dem Skalarproduktraum T_pM eine selbst-adjungierte Abbildung $\tilde{S} : T_pM \to T_pM$ gegeben durch

$$\langle \tilde{S}(x), y \rangle := Q(x,y).$$

Ist wieder $\{z_1, \dots, z_n\}$ eine beliebige ONB von T_pM, so folgt

$$\text{Spur von } \tilde{S} = \sum_{j=1}^{n} \langle \tilde{S}(z_j), z_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} Q(z_j, z_j)$$

$$= (n-1) \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}_p(z_j)$$

$$= n(n-1)\, S(p)$$

und auch $S(p)$ ist intrinsisch definiert.

<u>Bemerkung:</u> Man nennt die symmetrische Bilinearform

$\frac{1}{n-1} Q$ auch manchmal den <u>Ricci-Tensor.</u>

Berechnung bzgl. eines Koordinatensystems.

Es sei $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Dann sind die Koeffizienten des Ricci-Tensors $\frac{1}{n-1} Q$

bzgl. der Basis $\{X_i\}$ von $T_p M$:

$$\frac{1}{n-1} \underbrace{R_{ik}}_{Q(X_i, X_k)} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} R_{ijk}^{\;\;\;\;j} = \frac{1}{n-1} \sum_{j,m=1}^{n} R_{ijkm}\, g^{mj}$$

bzgl. lin. Abb.

$Z \longmapsto R(X_i, Z) X_k$

Matrix $(R_{ilk}^{\;\;\;\;j})_{il}$,

Spur: $\sum_{j=1}^{n} R_{ijk}^{\;\;\;\;j}$

$$\underbrace{\left(R_{ijk}^{\;\;\;\;l}\right)_{l\,j} \left(g_{lm}\right)_{m\,l}}\left(g^{ms}\right)_{s\,m}$$

Zeile Spalte

Zeile Spalte

Matrizen gleich

$$\underbrace{\left(R_{ijkm}\right)_{m\,j} \left(g^{ms}\right)_{s\,m}}$$

$$\left(\sum_m R_{ijkm}\, g^{ms}\right)_{s\,j}$$

Spur: $\sum_{s=j} \sum_m R_{ijkm}\, g^{mj}$

Ist schließlich $A: T_pM \to T_pM$ eine lineare selbst-adjungierte Abbildung und $B: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ die assoziierte Bilinearform, d.h. gilt

$$B(X,Y) = \langle A(X), Y\rangle, \qquad A(X_i) = \sum_l a_{il} X_l$$

so ist die Spur von A gegeben durch $\langle A(X_i), X_k\rangle = \sum_l a_{il} g_{lk}$

$$\sum_{i,k=1}^{n} B(X_i, \underset{\substack{\uparrow \\ R_{ik}}}{X_k})\, g^{ik}.$$

$= (a_{il})(g_{lk})$

$\underbrace{(a_{il})(g_{lk})}(g^{km})_{im}$

Spur: $B(X_i,X_k)g^{ik} = (A)$

Also ist die Skalarkrümmung in Koordinaten

$$S = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,k=1}^{n} R_{ik}\, g^{ik}. \qquad \leftarrow \underline{\text{Bew}}$$

Abschließend ein nützliches Lemma, das durch einen längeren - aber klar auf der Hand liegenden - Beweis durch elementare Rechnung gezeigt wird (Übg.)

<u>Lemma</u>. Es sei $f: \mathbb{R}^2 \supset A \to M$ & die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ seien (s,t).

Dann gilt:
$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} V = R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) V$$

für jedes V.F. $V = V_{(s,t)}$ längs f.