Kap. 6. Krümmung & isometrische Immersionen

Es sei nun $f : M \to \tilde{M}$ eine diffbare Immersion einer Mannigfaltigkeit $M = M^{(n)}$ der Dimension n in eine Mannigfaltigkeit $\tilde{M} = \tilde{M}^{(n+k)}$ der Dimension $k+n$.

Dann induziert die Metrik von $\tilde{M}$ in natürlicher Art und Weise eine Riemannsche Metrik auf M:

Für $v_1, v_2 \in T_pM$: $\langle v_1, v_2 \rangle_p^M := \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle_{f(p)}^{\tilde{M}}$.

Damit ist f eine isometrische Immersion von M in $\tilde{M}$.

Geometrie von M $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ Geometrie von $\tilde{M}$

Bsp. zur Motivation eine 2-dim Fläche S im $\mathbb{R}^3$.

S sei hier (auch nur zur Motivation) als Graph gg:

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \}.$$

S Graph über der Tangentialebene:

$$f(0,0) = 0, \quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

gilt lokal bei glatten Fläch[e]

Die zweite Fundamentalform in $0 \in \mathbb{R}^3$ ist dann

$$\mathrm{II}(x,y) = f_{xx}(0)x^2 + 2f_{xy}(0)xy + f_{yy}(0)y^2.$$

Gaußsche Krümmung in 0 $\boxed{\left(\frac{eg-f^2}{EG-F^2}\right) = K \text{ in lok. Koordinaten}}$

(*) $\quad K = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2.$

<u>Verallgemeinerung</u>?

- Kodimension m kann größer als 1 sein, d.h. die 2te F.F. muss Werte in einem V.R. der Dimension $m \geq 1$ haben.

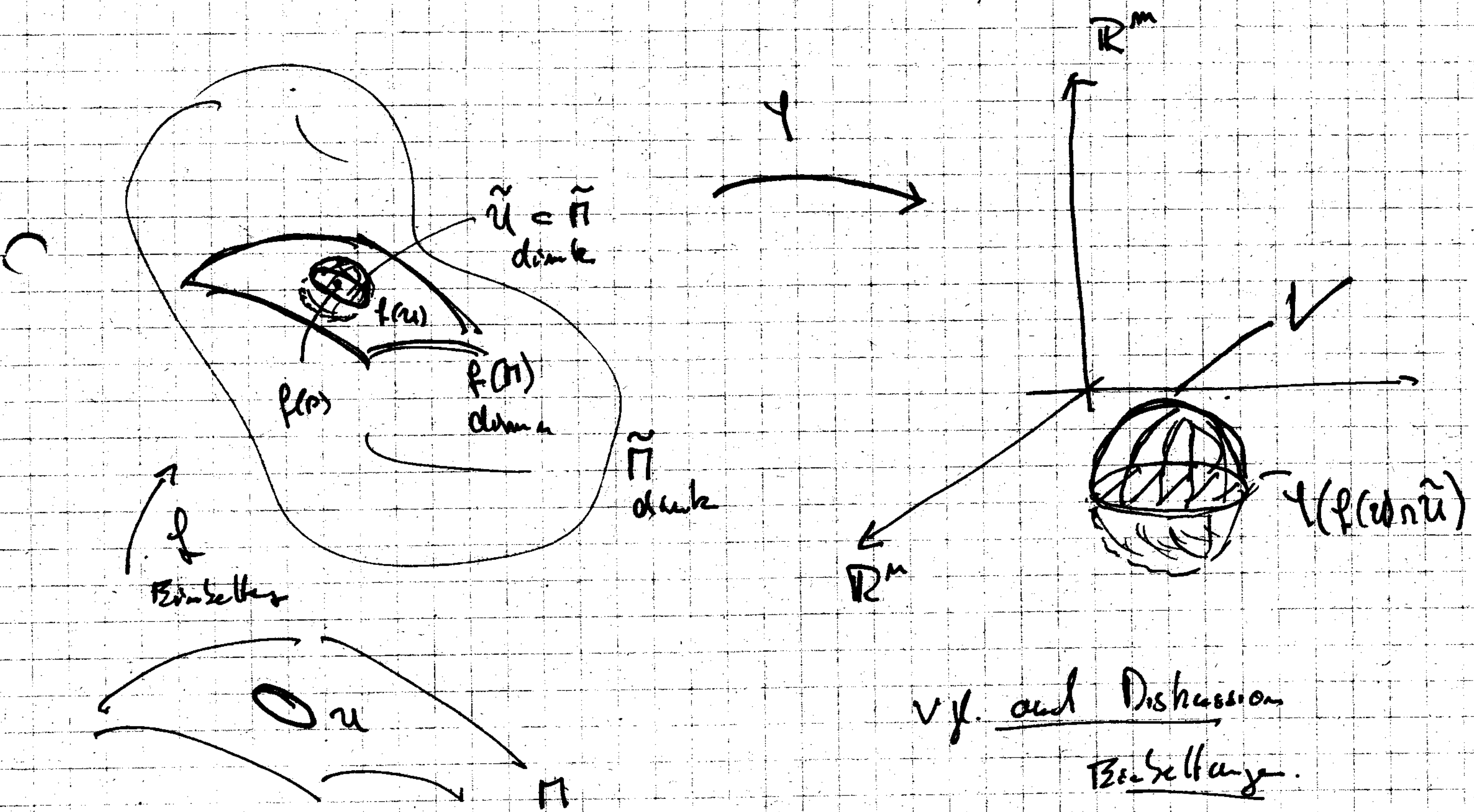
- Es wird sich zeigen, dass die Beziehungen zwischen den Riemannschen Metriken auf Π und $\tilde{\Pi}$ durch die 2te F.F. ausgedrückt werden kann.
- Insbesondere (& am wichtigsten): Gauß-Formel als Verallgemeinerung von (*) — gibt die Differenz der Krümmungen von Π, $\tilde{\Pi}$ in Termen der 2te F.F. $\rightsquigarrow$ <u>Theorema Egregium</u>
- Geometrische Interpretation der Schnittkrümmung $\rightsquigarrow$ eigentlich Riemanns Zugang.

Es sei nun also $f: M^{(m)} \to \tilde{M}^{(m+k)}$ eine isometrische Immersion.
Riemannsche Mfk.

Dann gibt es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung $p \in U \subset M$ mit „$f(U) \subset \tilde{M}$ ist Untermannigfaltigkeit".

(Immersion lokal Einbettung, Satz 3, p. 22)

$\Rightarrow \exists$ Umgebung $\tilde{U} \subset \tilde{M}$ von $f(p)$ & ein Diffeomorphismus $\varphi: \tilde{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$, V offen, sodass $\varphi|_{f(U) \cap \tilde{U}}$ ein Diffeomorphismus von $f(U) \cap \tilde{U}$ auf eine offene Menge $\subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^k$ ist.



vgl. auch Diskussion Einbettungen.

Identifiziere im Folgenden $\mathcal{U}$ mit $f(\mathcal{U})$

und einen Tangentialvektor $v \in T_q \Pi$, $q \in \mathcal{U}$,

mit $df_q(v) \in T_{f(q)} \tilde{\Pi}$. (z.B. T.d. „Fläche" mit Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ identifizieren)

Ist $\mathcal{U}$ klein genug, so kann man weiter lokale Vektorfelder auf Π (definiert auf $\mathcal{U}$) fortsetzen zu lokalen V.Fe auf $\tilde{\Pi}$ (definiert auf $\tilde{\mathcal{U}}$). Dies ist immer mithilfe des Diff. f möglich.

Ist nun $p \in \Pi$, so kann $T_p \tilde{\Pi}$ bzgl. des Skalarproduktes zerlegt werden:

$$\underline{T_p \tilde{\Pi} = T_p \Pi \oplus (T_p \Pi)^\perp},$$

d.h. $(T_p \Pi)^\perp$ ist das orthogonale Komplement von $T_p \Pi$ in $T_p \tilde{\Pi}$.

Schreibe für $v \in T_p \tilde{\Pi}$: $\underline{\underline{v = v^T + v^N}}$, $v^T \in T_p \Pi$, $v^N \in (T_p \Pi)^\perp$,

v^T : <u>tangentielle Komponente</u> von v,

v^N : <u>Normal-Komponente</u> von v.

Offenbar sind dann die beiden Abbildungen $T\tilde{M} \to T\tilde{M}$

$$(p,v) \longmapsto (p, v^T) \quad \text{und} \quad (p,v) \mapsto (p, v^N)$$

differenzierbar.

Auf $\tilde{M}$ sei $\tilde{\nabla}$ der Riemannsche Zshg.

Sind X, Y lokale V.F.en auf M, $\tilde{X}, \tilde{Y}$ deren lokale Fortsetzungen auf $\tilde{M}$, so setze (vgl. Ende Kap. 3)

natürlich nicht eind.

$$\nabla_X Y := \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)^T.$$

unabh. von der spez. Wahl der Fortsetzung, s.o.

vgl. Def. kovariante Abl. 2dim Fl. in $\mathbb{R}^3$

Dann ist ∇ der Riemannsche Zshg. zur auf M induzierten Metrik. !

Definiere nun zu lokalen Vektorfeldern X, Y auf M:

$$B(X,Y) := \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_X Y = \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)^\perp.$$

VF bzgl. $\tilde{M}$

$B(X,Y)$ definiert also ein zu M normales V.F. auf M.

Dabei hängt die Definition nicht von der speziellen Wahl der Fortsetzung ab.

In der Tat, ist $\overline{X}_1$ eine weitere Fortsetzung von $\overline{X}$, so gilt __auf M__

$$\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla_{X} Y\right) - \left(\tilde{\nabla}_{X_1}\tilde{Y} - \nabla_{X} Y\right)$$

$$= \tilde{\nabla}_{(\tilde{X} - X_1)}\tilde{Y} = 0 \quad \text{wegen } \tilde{X} = X_1 \text{ auf } M.$$

↳ (vgl. Diskussion Folg., hängt ab von $(\tilde{X} - X_1)$ auf M (wird nicht selbst differenziert, vgl. (1), p.65)

Ist Y_1 eine weitere Fortsetzung von Y, so gilt auf M:

$$\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla_{X} Y\right) - \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} Y_1 - \nabla_{X} Y\right) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\left(\tilde{Y} - Y_1\right)$$

$$= \tilde{\nabla}_{X}\left(\tilde{Y} - Y_1\right) = 0 \quad \text{wegen } \tilde{Y} = Y_1 \text{ auf } M.$$

hängt nur (s.o.) vom X ab, "Abl. in Richtung M"

$\tilde{Y} - Y_1 = 0$ auf M, vgl. wieder (1), p.65.

Also ist B wohldefiniert. Im folgenden bezeichne $\mathcal{X}(U)^{\perp}$ die diff'baren V.F. auf $U \approx f(U)$ normal zu M.

__Satz 1.__ Für $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ ist die Abbildung

$$B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp},$$
$$(X, Y) \mapsto B(X, Y) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla_{X} Y$$

__bilinear und symmetrisch.__

<u>Beweis.</u> Aus den Eigenschaften eines Zusammenhangs folgt sofort die Additivität bzgl. X & Y sowie

$$B(fX, Y) = f\,B(X, Y), \quad f \in \mathcal{D}(\mathcal{U}).$$

↖ vgl. Kap. 3.

Zu zeigen: $B(X, fY) = f\,B(X, Y)$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$.

↳ nicht-trivial, da Zshg. nicht-linear in diesem Sinne (vgl. Diskussion Krümmung)

Bezeichne eine Fortsetzung von f auf $\tilde{\mathcal{U}}$ mit $\tilde{f}$. Dann ist (unabh. von der Wahl von $\tilde{f}$)

$$B(X, fY) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}(\tilde{f}\tilde{Y}) - \nabla_X(fY)$$

$$= \tilde{f}\,\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - f\,\nabla_X Y + \tilde{X}(\tilde{f})\,\tilde{Y} - X(f)\,Y.$$

Auf M: $f = \tilde{f}$, $X = \tilde{X}$, $Y = \tilde{Y}$ ← Die "Nicht-Linearität" hebt sich raus

$$\Rightarrow \tilde{X}(\tilde{f})\,\tilde{Y} = X(f)\,Y,$$

also $B(X, fY) = f\,B(X, Y)$.

<u>Symmetrie:</u>

$$B(X, Y) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla_X Y \overset{\tilde{\nabla},\,\nabla \text{ symm.}}{=} \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{X} + [\tilde{X}, \tilde{Y}] - \nabla_Y X - [X, Y] = B(Y, X). \qquad \boxed{}$$

↕ hebt sich auf M weg

↑ auch zunächst absolut nicht klar

symm. Zshg: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

Bilinearität von B: $B(\overline{X}, \overline{Y})(p)$ hängt nur ab von den Werten $\overline{X}(p), \overline{Y}(p)$ (schreibe B in einem Koordinatensystem oder vgl. obige Argumente. $\overline{X}(p)$ etc. hebt sich raus)

immer für iso. Imm.

Zur Definition der 2^{ten} Fundamentalform.

Es sei $p \in M$ und $\eta \in (T_p M)^\perp$. Dann ist

$$H_\eta : T_p M \times T_p M \to \mathbb{R},$$

"Abl" "DN" (vgl. 2die Fl. $-\langle dN, v \rangle$)

$$H_\eta(x, y) := \langle B(x,y), \eta \rangle$$

nach Satz 1 eine symmetrische Bilinearform auf $T_p M$.

Definition 1. Die quadratische Form II_η auf $T_p M$, definiert durch

$$\mathrm{II}_\eta(x) := H_\eta(x, x)$$

heißt zweite Fundamentalform von M (d.h. von $f: M \to \tilde{M}$) bei p längs des Normalenvektors η.

Bem. Manchmal nennt man auch B die 2^{te} F.F.

Zu der symmetrischen Bilinearform H_η gehört eine <u>selbstadjungierte lineare Abbildung</u>

$$S_\eta : T_p M \to T_p M$$
$$\langle S_\eta(x), y\rangle := H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle .$$

<u>Satz 2.</u> Es sei $p \in M$, $x \in T_p M$, $\eta \in (T_p M)^\perp$. Es bezeichne N eine lokale Fortsetzung von η normal zu M. Dann ist

bekannte Darstellung wie bei 2-dim. Fl.

$$\underline{S_\eta(x) = -(\tilde{\nabla}_x N)^T} .$$

<u>Beweis.</u> Es sei $y \in T_p M$ und X, Y seien lokale Fortsetzungen von x, y <u>tangential zu M</u>.

Dann ist $\langle N, Y\rangle \equiv 0$ auf M: ($\Rightarrow$ Verträglichkeit:

$$0 = X\langle N, Y\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y\rangle + \langle N, \tilde{\nabla}_X Y\rangle)$$

$$\langle S_\eta(x), y\rangle = \langle B(X,Y)(p), N\rangle$$
$$= \langle \tilde{\nabla}_X Y - \underbrace{\nabla_X Y, N}_{=0}\rangle (p)$$
$$= \langle \tilde{\nabla}_X Y, N\rangle (p) = -\langle Y, \tilde{\nabla}_X N\rangle (p)$$
$$= \langle -\tilde{\nabla}_X N, y\rangle$$

$\boxed{\text{S}}$

$\forall y \in T_p M \leftarrow S_\eta$ lebt auf $T_p M$.