Beispiel. Behandle den Spezialfall der Kodimension 1, $m=1$,

d.h. $f: M^{(n)} \to \tilde{M}^{(n+1)}$ und $M \approx f(M) \subset \tilde{M}$

ist eine Hyperfläche (evtl. mit ~~Selbst~~ Selbstdurchschneidungen).

Es sei $p \in M$, $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$.

Da $S_\eta : T_pM \to T_pM$ symmetrisch ist, gibt es

eine ONB aus Eigenvektoren $\{e_1, \dots, e_n\}$ von

T_pM mit zugehörigen reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i \quad , \quad i = 1, \dots, n.$$

Nun seien M und $\tilde{M}$ beide orientierbar und orientiert.

Dann ist η eindeutig bestimmt, wenn man verlangt,

dass $\{e_1 \dots e_n\}$ sowie $\{e_1 \dots e_n, \eta\}$ positive Basen

von T_pM & $T_p\tilde{M}$ sind.

In diesem Fall heißen die e_i Hauptkrümmungsrichtungen

und die $\lambda_i = \kappa_i$ die Hauptkrümmungen von

M in $\tilde{M}$ (bzw. von f).

Die symmetrischen Funktionen der $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind **Invarianten der Immersion** $f : M \to \tilde{M}$.

(~ Vorzeichen wechsel bei Orientierung) etc.

↳ stellt sich nur auf η betrachtet werden

So nennt man

$$\det(S_\eta) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

die Gauß-Kronecker-Krümmung von f und

$$\frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

die mittlere Krümmung von f.

Ein wichtiger Fall bei diesen Betrachtungen ist $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$,

d.h. es werden Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet.

Dann kann S_η wie folgt geometrisch interpretiert werden:

Es sei dazu N eine lokale Fortsetzung von η, $|N| = 1$ normal zu M. Es sei weiter $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definiere die sphärische Gauß-Abbildung

$$g : M^{(n)} \to S^n$$

$$g(q) = N(q)(-q) \qquad (q \in M \subset \mathbb{R}^{n+1})$$

↳ in den Ursprung ↔ ψ nach Interpretation

Es sind $T_q M$ & $T_{g(q)} S^n$ parallel. (Bel. Kurve auf S^n, d.h. $|c|=1$, $\leadsto c' \perp c \sim N$)

Also können $T_q M$ & $T_{g(q)} S^n$ identifiziert werden.

Damit ist

$$dg_q : T_q M \to T_q M$$

gegeben durch

im $\mathbb{R}^n$: $\frac{D}{dt} = \frac{d}{dt} \leadsto \nabla_{\frac{dc}{dt}}$

$$dg_q(x) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t)) = \tilde{\nabla}_x N$$

$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$
Kurve mit $c(0) = q$, $c'(0) = x$

$$= (\tilde{\nabla}_x N)^T = -S_n(x).$$

$\langle N, N\rangle = 1 \leadsto \langle \tilde{\nabla}_x N, N\rangle = 0$

Kodim 1. $\perp N$ liegt $\in T$

D.h.: $-S_n$ ist die Ableitung der sphärischen Gauß-Abbildung und heißt die Weingarten-Abbildung.

Nun zu:

Beziehung zwischen der Krümmung von M und der Krümmung von $\tilde{M}$ sowie der 2^{te} F.F. von M in $\tilde{M}$.

Theorem. (Gauß)

Es sei $p \in M$ und $x, y \in T_p M$ seien orthonormal.

Dann gilt ($K(x,y)$, $\tilde{K}(x,y)$ die Schnittkrümmung der von x, y aufgespannten Ebene σ in M bzw. $\tilde{M}$)

$$K(x,y) - \tilde{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y) \rangle - |B(x,y)|^2. \quad (1)$$

Beweis. Es seien X, Y (lokale) orthogonale Fortsetzungen von x, y auf M (nur in $T_p M$ vgl.), $\tilde{X}, \tilde{Y}$ (lokale) Fortsetzungen auf $\tilde{M}$. Dann gilt

$\tilde{X} \to X$, $\tilde{Y} \to Y$

hängt i. d. Tat nur von σ ab, nicht von der Fortsetzung → Linearität von R

$$\underbrace{K(x,y) - \tilde{K}(x,y)}_{\text{Def. } K, \tilde{K}} = \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X$$

$$- (\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{X} - \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X}), Y \rangle (p)$$

(*)

$$+ \langle \nabla_{[X,Y]} X - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X},\tilde{Y}]} \tilde{X}, Y \rangle (p)$$

In (*) verschwindet der letzte Term, da

∇ = tangentiale Komp. per def.

$$\langle \nabla_{[X,Y]} X - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X},\tilde{Y}]} \tilde{X}, Y \rangle (p) = - \langle (\tilde{\nabla}_{[\tilde{X},\tilde{Y}]} \tilde{X})^N, Y \rangle (p)$$

$Y(p) = y \in T_p M$.

$= 0$.

Betrachte weiter lokal orthonormale Vektorfelder

$E_1, \dots, E_m$, $m = \dim \tilde M - \dim M$, die normal

sind zu M. Dann gilt mit $H_i = H_{E_i}$

$$\underset{\text{normal zu } M}{B}(\underline X, \underline Y) = \sum_{i=1}^m H_i(\underline X, \underline Y)\, E_i .$$

$$B = \sum_i \underbrace{\langle B, E_i\rangle}_{H_i} E_i$$

Die Definition von B liefert an der Stelle p:

Def. B: $\tilde\nabla_{\tilde{\underline Y}} \tilde{\underline X} = B(\underline Y, \underline X) + \nabla_{\underline Y} \underline X$

$$\tilde\nabla_{\tilde{\underline Y}} \left(\tilde\nabla_{\tilde{\underline X}} \tilde{\underline X}\right) = \tilde\nabla_{\tilde{\underline Y}} \left\{ \sum_{i=1}^m H_i(\underline X, \underline X)\, E_i + \nabla_{\underline X} \underline X \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^m \left\{ H_i(\underline X, \underline X)\, \tilde\nabla_{\tilde{\underline Y}} E_i + \tilde{\underline Y}\left(H_i(\underline X, \underline X)\right) \underset{\perp \underline Y}{E_i} \right\}$$

$$+ \tilde\nabla_{\tilde{\underline Y}} \nabla_{\underline X} \underline X$$

$0 = \tilde{\underline Y} \langle E_i, \underline Y\rangle = \langle \tilde\nabla_{\tilde{\underline Y}} E_i, \underline Y\rangle + \langle E_i, \tilde\nabla_{\tilde{\underline Y}} \underline Y\rangle$

in p $\Longrightarrow$

$$\langle \tilde\nabla_{\tilde{\underline Y}} \tilde\nabla_{\tilde{\underline X}} \tilde{\underline X}, \underline Y\rangle = -\sum_{i=1}^m H_i(\underline X, \underline X) \langle E_i, \tilde\nabla_{\tilde{\underline Y}} \underline Y\rangle$$

$$+ \langle \nabla_{\underline Y} \nabla_{\underline X} \underline X, \underline Y\rangle$$

$\perp$ beim Skalarprodukt bleibt die Projektion ∇.

$$\langle E_i, \tilde\nabla_{\tilde{\underline Y}} \underline Y\rangle = \underbrace{\langle E_i, B(\underline Y, \underline Y)\rangle}_{H_i(\underline Y, \underline Y)} + \underbrace{\langle E_i, \nabla_{\underline Y} \underline Y\rangle}_{=0}$$

$$= -\sum_{i=1}^m H_i(\underline X, \underline X)\, H_i(\underline Y, \underline Y) \qquad (2)$$

$$+ \langle \nabla_{\underline Y} \nabla_{\underline X} \underline X, \underline Y\rangle$$

Analog zu (2) folgt (oben rot markiert)

$$\langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X}, Y \rangle = -\sum_{i=1}^{m} H_i(X,Y)\, H_i(X,Y) + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle \quad (3)$$

(2) & (3) in (*):

$$K(x,y) - \tilde{K}(x,y) = \sum_{i=1}^{m} H_i(X,X)\, H_i(Y,Y) - \sum_{i=1}^{m} H_i(X,Y)^2$$

$$\overset{E_i:\,\mathrm{ONB}}{=} \langle B(X,X), B(Y,Y) \rangle - |B(X,Y)|^2$$

$\square$

Bemerkungen. i.) Im Fall einer Hyperfläche

$f: M^{(n)} \to \tilde{M}^{(n+1)}$ hat die Gauß-Formel (1) eine

sehr einfache Gestalt.

Dazu sei $p \in M$ und $\eta \in (T_pM)^{\perp}$.

Wähle eine ONB $\{e_1, \dots, e_n\}$ von T_pM, in

der $S_\eta = S$ Diagonalgestalt hat, d.h. $S(e_i) = \lambda_i e_i$,

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von S sind.

$H = H_\eta$ ist nur eine Komp.

Dann gilt $H(e_i, e_j) \underset{\uparrow}{=} \lambda_i \delta_{ij}$ und (1) wird zu

$\langle B(e_i,e_j), \eta \rangle = \langle S_\eta(e_i), e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle$

$$K(e_i, e_j) - \tilde{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j \qquad (i \neq j) \quad (4)$$

ii) Im Spezialfall $M = M^{(2)} \subset \tilde{M}^{(3)} = \mathbb{R}^3$

ist die Gauß-Krümmung der Fläche M das Produkt der Hauptkrümmungen $\lambda_1 \lambda_2$.

Wegen (4) und da für $\tilde{M} = \mathbb{R}^3$ gilt $\tilde{K} \equiv 0$, folgt:

$$\boxed{\text{Gauß-Krümmung} = \text{Schnittkrümmung von } M.}$$

Insbesondere folgt auch das <u>Theorema Egregium</u> von Gauß:

<u>Die Gauß-Krümmung von $M^{(2)} \subset \mathbb{R}^3$ ist invariant unter Isometrien.</u>

<u>Bsp.</u> (Krümmung von S^n) S^n sei orientiert durch die nach innen zeigende Einheitsnormale $N(x) = -x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|x| = 1$. Dann ist die Gauß-Abb. $g(x) = -x$ und die Weingartenabb. $S_N = \mathrm{id}$. Insbesondere sind alle EW. von $S_N = 1$ und jeder $v \in T_pS^n$ ist Eigenvektor zum EW 1. Aus (4) bzw (1) folgt, dass <u>S^n konstante Schnittkrümmung $\equiv 1$</u> hat.

<u>Definition</u> 2. Eine Immersion $f: M \to \tilde{M}$ heißt <u>geodätisch</u> bei $p \in M$, falls für jedes $\eta \in (T_pM)^\perp$ die 2te F.F. $II_\eta \equiv 0$ (in p) ist.

Eine Immersion ist <u>total geodätisch</u>, falls sie in jedem $p \in M$ geodätisch ist.

<u>Satz 3.</u> Eine Immersion $f: M \to \tilde{M}$ ist genau dann geodätisch bei $p \in M$, wenn jede in p startende Geodätische auch in $\tilde{M}$ geodätisch in p ist.

<u>Beweis.</u> Es sei $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = x$ und N eine lokale Fortsetzung, normal zu M, eines Vektors $\eta \in (T_pM)^\perp$. Setze γ' fort zu einem lokalen Vektorfeld $\underline{X}$ tangential zu M.

Aus $\langle \underline{X}, N \rangle = 0$ erhält man in p:

$$II_\eta(x,x) = \langle S_N(x), x \rangle = -\langle \tilde{\nabla}_{\underline{X}} N, \underline{X} \rangle$$

$$= -\underline{X}\,\underbrace{\langle N, \underline{X} \rangle}_{=0} + \langle N, \tilde{\nabla}_{\underline{X}} \underline{X} \rangle$$

$$= \langle N, \tilde{\nabla}_{\underline{X}} \underline{X} \rangle.$$

Also ist f geodätisch bei ~~p~~ p genau dann, wenn für alle $x \in T_p M$ die Geodätische γ in M (mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = x$) die Bedingung genügt:

$$(\tilde{\nabla}_X X)(p) \text{ hat keine Normalkomp}$$

$$\Leftrightarrow (\tilde{\nabla}_X X)(p) = (\nabla_X X)(p)$$

$$= \nabla_{\gamma'} \gamma' _{|t=0} = 0.$$

$\Rightarrow$ Bed. ⊡

Geometrische Interpretation der Schnittkrümmung

(wie von Riemann eingeführt).

Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Weiter sei $B \subset T_p M$ eine offene Kugel, sodass $\exp_{p|B}$ ein Diffeomorphismus ist und es sei $\sigma \subset T_p M$ ein 2-dim Teilraum.

im Tangentialraum

Dann ist $\exp_p(\sigma \cap B) =: S \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ~~E~~ mit $p \in S$.

Anschaulich besteht S aus "kleinen" Geodätische, die in p beginnen und dort tangential sind zu σ.

Nach Satz B ist S geodätisch bei p, also verschwindet die 2^{te} F.F. der Inklusion $i: S \hookrightarrow M$

Als Untermannigfaltigkeit von M hat S die induzierte Riemannsche Metrik, deren Gauß-Krümmung in p mit K_S bezeichnet sei.

Aus der Gauß-Formel (1) folgt

$$K_S(p) = K(p,\sigma)$$

da $II_\eta(x,x) = 0 \quad \forall\, x \in T_pM,\ \eta \in (T_pM)^\perp \Leftrightarrow B(x,y) = 0 \quad \forall\, x,y \in T_pM.$

Mit anderen Worten:

"Die Schnittkrümmung $K(p,\sigma)$ ist die Gauß-Krümmung (an der Stelle p) einer "kleinen" Fläche in M, die gebildet wird aus Geodätische in M, die in p starten und dort tangential sind zu σ."