Es sei nun $\underline{x} : \mathcal{U} \to M$ eine Parametrisierung

bei $p = \underline{x}(0)$.

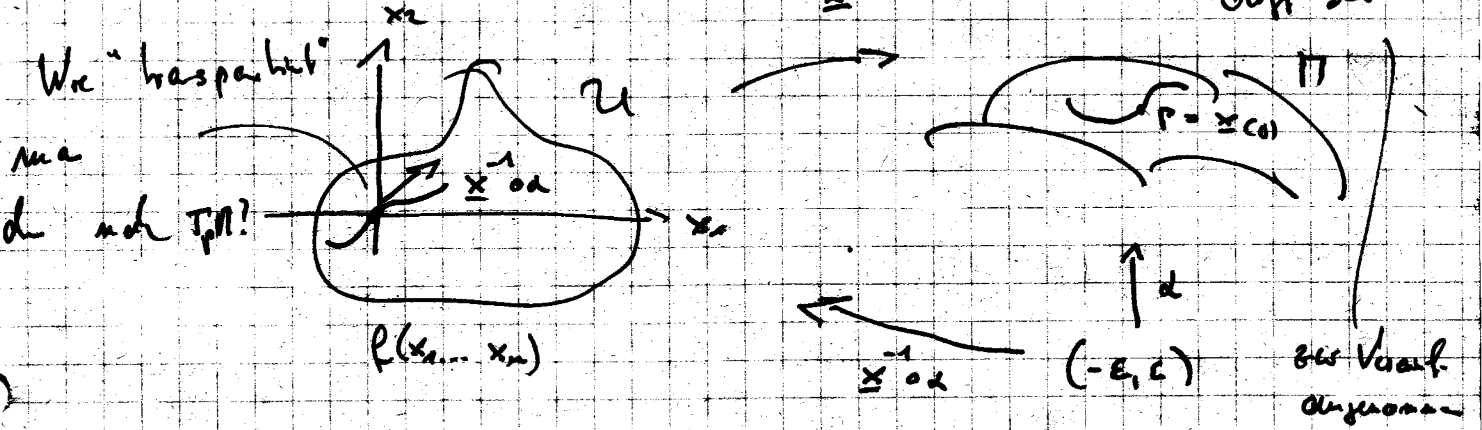
$f \in \mathcal{D}_p$ und eine Kurve α mit $\alpha(0) = p$

werden bzgl. dieser Parametrisierung dargestellt als eigentlich $\hat{f}$

formal richtige Notat. $\in \mathcal{U}$ Notation: f als Abb. $\mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\underline{x}$ fix

$$f \circ \underline{x}(q) = f(x_1, \dots, x_n), \quad q = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}$$

$$(\underline{x}^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$ ← Kurve in $\mathbb{R}^n$ Warum diff'bar?



Es ist

$$\alpha'(0) f = \frac{d}{dt} (f \circ \alpha)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots x_n(t))\Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_0$$ eigentlich $\hat{f}$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{|0} \right) f, \text{ d.h.}$$

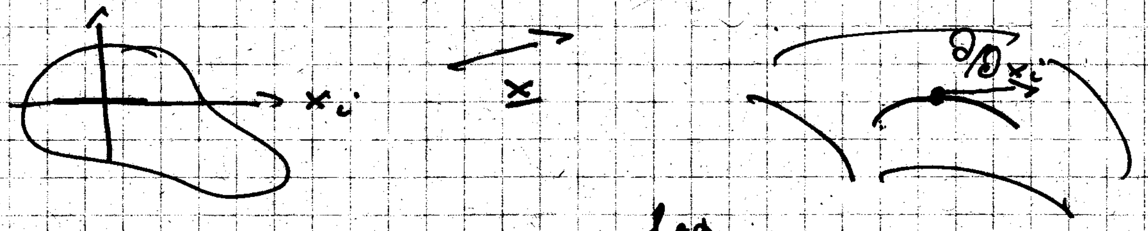
$$\boxed{\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{|0}} \qquad (1)$$

Hier steht der [illegible] so.

$\underline{x}^{-1} \circ \alpha$: Kurve in $\mathcal{U}$

In (1) bezeichnet $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Big|_p$ den Tangentenvektor an die Koordinatenkurve

$$\underset{t}{x_i} \overset{\alpha}{\longmapsto} \underline{x}(0,0,\dots,0,\underset{t}{x_i},0\dots0) \in M$$



$$\alpha'(0)f = \frac{d}{dt}\left(\overbrace{f\left(\underline{x}(0,\dots,0,\underset{t}{x_i},0\dots0)\right)}^{f\circ\alpha}\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\hat{f}(0,\dots,0,\underset{t}{x_i},0\dots)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}\Big|_{t=0} \qquad \underline{\underline{\text{s.o.}}}\quad \hat{f} = f\circ\underline{x}$$

Konsequenz. i.) Der Tangentenvektor an die Kurve α hängt nur ab von der Ableitung von α in einem Koordinatensystem.

ii.) Der Tangentialraum T_pM ist ein n-dim. Vektorraum.

iii.) Die Wahl einer Parametrisierung $\underline{x}: U \to M$ liefert eine assoziierte Basis von T_pM:

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Big|_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\Big|_p\right\}.$$

Mit der Definition Tangentialraum kann auch das Differential einer Abbildung zwischen zwei diff'baren Mannigfaltigkeiten eingeführt werden. Zunächst:

<u>Satz 1.</u> Es seien $M_1^{(n)}, M_2^{(m)}$ diff'bare Mannigfaltigkeiten (dim n, m) und die Abbildung $\varphi : M_1 \to M_2$ sei differenzierbar.

Zu $p \in M_1$ & $v \in T_p M$ wähle man eine diff'bare Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_1$ mit

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v.$$

Differential immer zwischen Tangentialräumen u. als Approx. für die Mfkt.

Mit $\beta := \varphi \circ \alpha$ sei

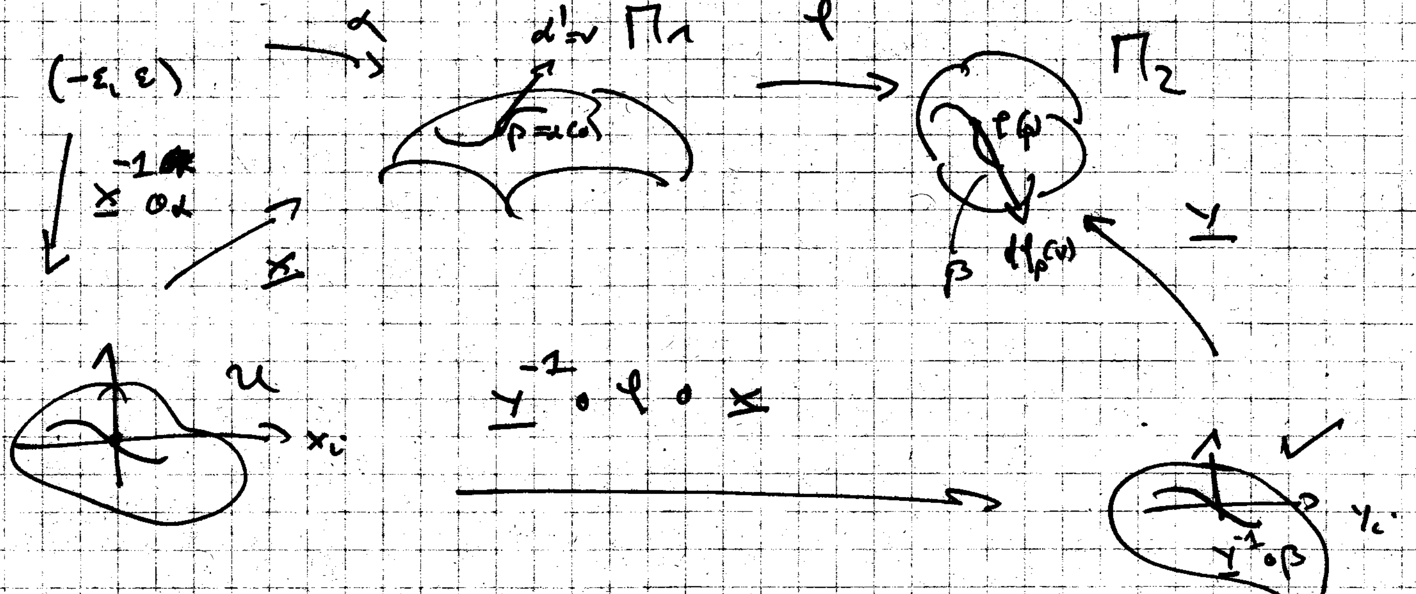
$$d\varphi_p : T_p M_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)} M_2$$

definiert von

$$d\varphi_p(v) := \beta'(0).$$

Dann ist diese Abbildung <u>linear und unabhängig von der Wahl von α</u>.

Beweis. Man betrachte Parametrisierungen $\underline{x}: U \to M_1$ und $\underline{y}: V \to M_2$ der Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 bei p bzw. $\varphi(p)$. (o.E. $\underline{x}(0) = p$, $\underline{y}(0) = \varphi(p)$).



$$\underline{y}^{-1} \circ \varphi \circ \underline{x}(q) := (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$$

$$q = (x_1, \dots, x_n) \in U, \qquad (y_1, \dots, y_m) \in V.$$

Es ist

$$\underline{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Koordinaten der Kurve

$$\underline{y}^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(x_1(t) \dots x_n(t)), \dots, y_m(x_1(t), \dots x_n(t)))$$

Bzgl. der Basis $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_0 \right\}_{i=1..m}$ von $T_{\varphi(p)} M_2$ ist

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i}\Big|_0 x_i'(0), \dots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_i}\Big|_0 x_i'(0) \right) \quad (2).$$

$$\beta'(0) f = \frac{d}{dt} (f \circ (\varphi \circ \alpha))\Big|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{m} y_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_0 \right) f$$

auf M_2 (1) $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k} x_k' \right.$

Komponente $\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_0$: $y_1'(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} x_k'$

Die Gleichheit (2) impliziert, dass $\beta'(0)$ nicht von der speziellen Wahl von α abhängt (nur von v).

(3) kann auch geschrieben werden als

$$\beta'(0) = d\varphi_p(v) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{l_0} x_j'(0) .$$

hängt!, s.o., nicht von der spezielle Wahl von α ab.

$i = 1, \ldots, m$
$j = 1, \ldots, n$
$m \times n$ Matrix

$x_j'(0)$: Spaltenvektor.

<u>Fazit:</u> Es handelt sich um eine lineare Abbildung, die bzgl. der Basen $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{l_0}$, $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{l_0}$ durch die Matrix $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$ dargestellt wird. $\square$

<u>Definition 4.</u> Die Abbildung

$$d\varphi_p : T_p M_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)} M_2$$

heißt das <u>Differential von φ bei p</u>.

<u>Definition 5</u>: Es seien M_1, M_2 diff'bare Mannigfaltigkeit.

Dann heißt eine Abbildung $\varphi: M_1 \to M_2$ <u>Diffeomorphismus</u>, wenn φ bijektiv, diff'bar und auch φ^{-1} diff'bar ist.

φ heißt <u>lokaler Diffeomorphismus</u> bei $p \in M$, falls es Umgebungen U von p & V von $\varphi(p)$ gibt, sodass $\varphi_{|U}: U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Der Begriff Diffeomorphismus ist der natürliche Äquivalenzbegriff für diff'bare Mannigfaltigkeiten. ~~vgl. Atlas~~, ~~Koordinaten...~~ vgl. <u>Übung 3</u>.

Ist $\varphi: M_1 \to M_2$ ein Diffeomorphismus, so ist $d\varphi_p : T_p M_1 \to T_{\varphi(p)} M_2$ für alle $p \in M_1$ ein <u>Isomorphismus</u> (Kettenregel)
linear, bijektiv
Insbesondere ist $\dim M_1 = \dim M_2$.

Mithilfe des Umkehrsatzes im $\mathbb{R}^n$ folgt auch

Satz 7. Ist $\varphi: M_1^{(n)} \to M_2^{(n)}$ diff'bar

und ist für $p \in M$

$$d\varphi_p : T_p M_1 \to T_{\varphi(p)} M_2$$

ein Isomorphismus, so ist φ lokaler Diffeomorphismus bei p.

Der Begriff des Differentials erlaubt auch

Definition 6. Es seien M, N diff'bare Mannigfaltigkeit und φ eine diff'bare Abbildung $M \to N$.

φ heißt Immersion, falls $d\varphi_p : T_p M \to T_{\varphi(p)} N$ für jedes $p \in M$ injektiv ist.

Ist zudem $\varphi: M \to \varphi(M) \subset N$ ein Homöomorphismus auf sein Bild (bzgl. der von N induzierten Teilraumtopologie), so heißt φ Einbettung.

Ist $M \subset N$ & $i: M \hookrightarrow N$ eine Einbettung, so nennt man M eine Untermannigfaltigkeit von N.

(vgl. Bsp.)

Bezeichnung. Ist $\varphi : M^{(m)} \to N^{(n)}$ eine Immersion, so ist $m \leq n$ und $n-m$ heißt die **Kodimension** der Immersion.

Bsp. Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche (vgl. "Erinnerung", p. 1).

Dann ist durch die Parametrisierungen $\underline{x}_\alpha : U_\alpha \to S$ eine diff'bare Struktur auf S erklärt.

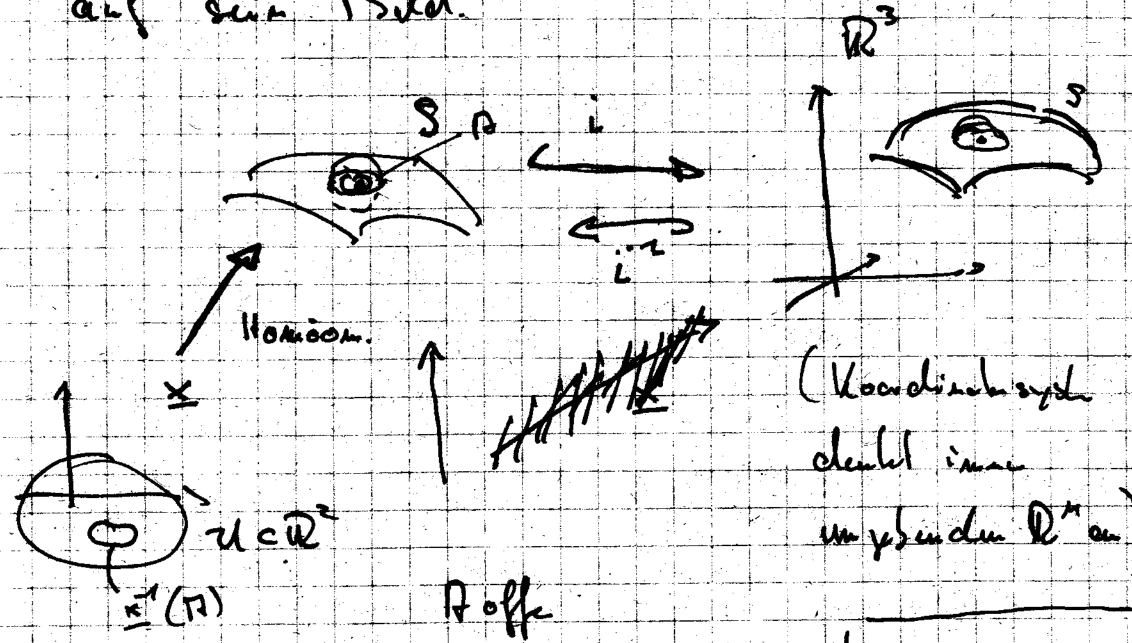
i.) Bzgl. dieser Struktur sind die $\underline{x}_\alpha$ diff'bare Einbettungen von U_α in S. (per definitionem)

ii.) S ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, $i : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ist Einbettung:

- Zu jedem $p \in S$ $\exists\, \underline{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ und ist V eine Umgebung von p, j die Identität, so ist $j : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung des $\mathbb{R}^3$ bei $i(p)$.

  $j^{-1} \circ i \circ \underline{x}$ ist diff'bar. ✓

- Das Differential ist nach Definition injektiv (vgl. (2)) und i ist ebenfalls nach Definition ein Homöomorphismus auf sein Bild.



(Koordinatensystem deutet immer umgebenden $\mathbb{R}^n$ an)

A offen

$:\Leftrightarrow \underline{x}^{-1}(A)$ offen

Leg um jedes $p \in A$

$B(p) \subset V$, $B(p) \cap S \subset A$

$\hat{\mathbb{R}}^3$

$\cup B(p)$ offen in $\mathbb{R}^3$

$\cup B(p) \cap S = A$

A offen bzgl. Teilraumtopologie

Ann. $\{p_k\} \subset S - A$

$p_k \to p \in A$

$\Rightarrow \underline{x}^{-1}(p_k) \notin \underline{x}^{-1}(A)$

$\to \underline{x}^{-1}(p)$

$\underline{x}^{-1}$ stetig $\in \underline{x}^{-1}(A)$

↯ $\underline{x}^{-1}(A)$ offen

Teilraumtopologie

$X_0 \subset X$

$V \subset X_0$ heißt offen in der Teilraumtopologie von X_0 in X, wenn sich eine in X offene Menge U mit $V = X_0 \cap U$ finden läßt

Geg. $A = V \cap S$, V offen

Beh. $\underline{x}^{-1}(A)$ ist offen.

Bew. sei $x_0 \in \underline{x}^{-1}(A)$, betr. $B_\delta(x_0)$, δ hinr. klein. Ann. $x_k \to x_0$

$\underline{x}(x_k) \notin A \Rightarrow \underline{x}(x_0) \notin V$ ↯

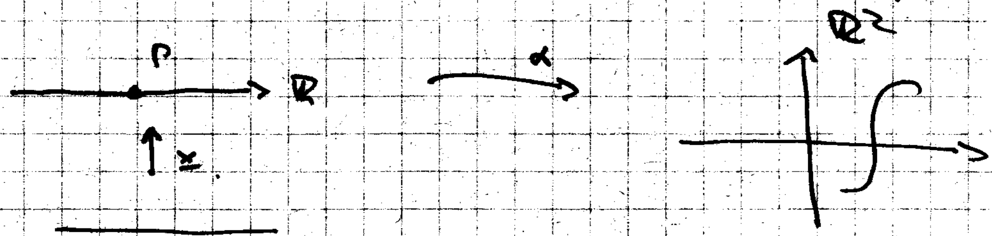
nicht im Urbild $\quad \hat{A} = V \cap S$

Einfache Beispiele: Kurven. Es sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

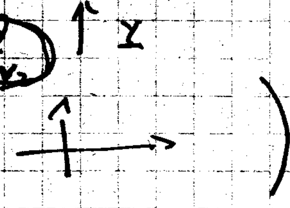
(formal: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ mit Id. als diff'bare Struktur, $T_p\mathbb{R}$ bzw $T_p\mathbb{R}^2$:

$$\gamma'(0) \mathrel{\hat{=}} \underbrace{\gamma'(0)}_{\text{als Abl.}} \frac{\partial}{\partial x}\Big|_0 \; ; \quad \chi'(0) \mathrel{\hat{=}} \chi_1'(0) \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0 + \chi_2'(0) \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_0 ,$$

als Diff'operator $d\alpha_p$: Bew. $\alpha \circ \gamma = \chi$, $\chi' = \alpha'(\gamma(t))\gamma'$

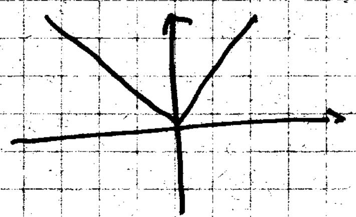


$$\boxed{\gamma'(0) = v \qquad d\alpha_p(v) = \alpha_1' v \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2' v \frac{\partial}{\partial x_2}}$$

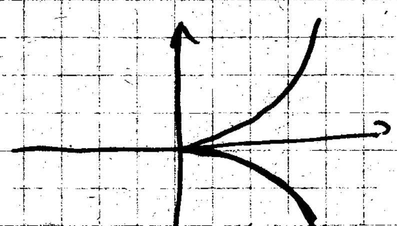


i.) $\alpha(t) = (t, |t|)$

nicht diff'bar in $t=0$



ii) $\alpha(t) = (t^2, t^3)$



Neilsche Parabel

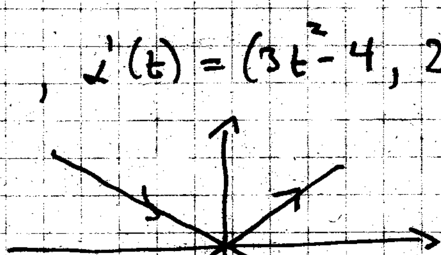
$\alpha'(0) = (0,0)$

Keine Immersion

iii.) $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq (0,0)$

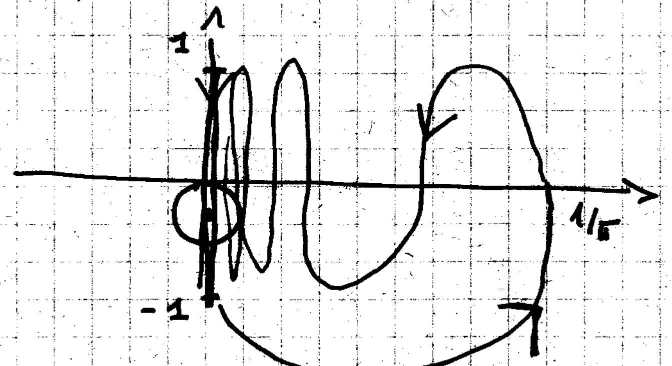
Immersion

also $\alpha(-2) = \alpha(2) = (0,0)$



Keine Einbettung (Selbstüberschneidung)

iv.) $$\alpha(t) = \begin{cases} (0, -(t+2)) & t \in (-3,-1) \\ \text{reguläre Kurve von } (0,-1) \text{ nach } (\frac{1}{\pi},0) & \\ (-t, -\sin\frac{1}{t}) & t \in (-\frac{1}{\pi},0) \end{cases}$$



Immersion

ohne Selbstüberschneidung

Keine Einbettung. (Teilraumtopologie des $\mathbb{R}^2$ ist nicht die der Kurve, s.o.)
$\rightsquigarrow$ Zusammenhangskomp.

Immersionen $\longleftrightarrow$ Einbettungen. Lokal gilt:

Satz 3. Es sei $n \leq m$ & $\varphi: M_1^{(n)} \to M_2^{(m)}$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem $p \in M_1$ eine Umgebung $V \subset M_1$ von p, sodass $\varphi_{|V}: V \to M_2$ eine Einbettung ist.

Beweis. Umkehrsatz. $\square$