Tangentialbündel als diff'bare Struktur (wichtig für Vektorfelder!)

Betrachtet sei eine diff'bare Mannigfaltigkeit $M = M^{(n)}$ (Geodätische)

sowie $TM := \{ (p,v) : p \in M, \ v \in T_pM \}$.

Auf TM, dem Tangentialbündel von M, soll eine diff'bare Struktur eingeführt werden. (dim $2n$)

Sei dazu $\{ (x_\alpha, U_\alpha) \}$ Atlas von M.

$(x_\alpha^1, \dots, x_n^\alpha)$: Koordinaten auf U_α

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha} \dots \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right\}$: Basis der Tangentialräume auf $x_\alpha(U_\alpha)$.

Setze $y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM$

$$y_\alpha(x_1^\alpha, \dots x_n^\alpha, u_1 \dots u_n) := \left(x_\alpha(x_1^\alpha \dots x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right),$$

$(u_1 \dots u_n) \in \mathbb{R}^n$.

Bel. $\{ (y_\alpha, U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \}$

ist diff'bare Struktur auf TM.

In der Tat ist $\bigcup_\alpha \underline{x}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) = M$ &

$$(d\underline{x}_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{\underline{x}_\alpha(q)} M \qquad (q\in\mathcal{U}_\alpha),$$

bzw. $\frac{d}{dt}(f\circ(\underline{x}\circ\gamma))$ — Kurve in $\mathcal{U}_\alpha$ bzw. $\frac{d}{dt}(f\circ x)$ — Kurve in M

also

$$\bigcup_\alpha \underline{Y}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha\times\mathbb{R}^n) = TM \qquad \text{(i), Def. 1.)}$$

Sei nun $(p,v)\in \underline{Y}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha\times\mathbb{R}^n)\cap \underline{Y}_\beta(\mathcal{U}_\beta\times\mathbb{R}^n)$.

Dann ist

$$(p,v) = (\underline{x}_\alpha(q_\alpha), d\underline{x}_\alpha(v_\alpha))$$

$$= (\underline{x}_\beta(q_\beta), d\underline{x}_\beta(v_\beta))$$

mit $q_\alpha\in\mathcal{U}_\alpha$, $q_\beta\in\mathcal{U}_\beta$, $v_\alpha, v_\beta\in\mathbb{R}^n$.

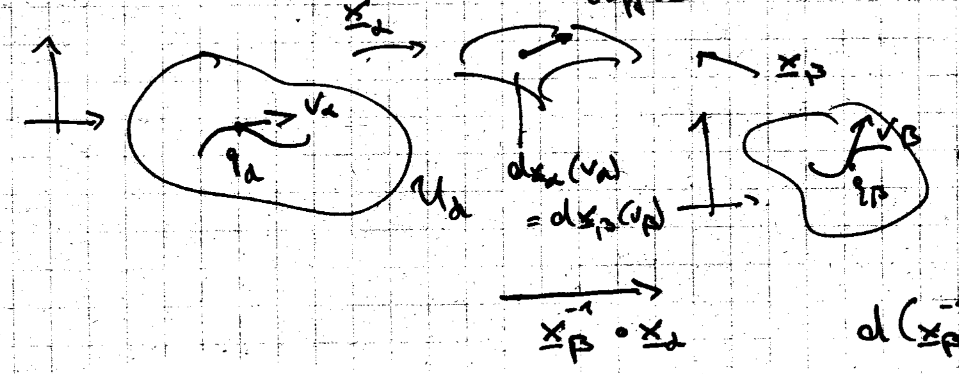
siehe Darstellung in Koord.

Es folgt

$$Y_\beta^{-1}\circ\underline{Y}_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = Y_\beta^{-1}(\underline{x}_\alpha(q_\alpha), d\underline{x}_\alpha(v_\alpha))$$

$$= (\underbrace{(x_\beta^{-1}\circ x_\alpha)(q_\alpha)}_{\text{diff'bar}}, d\underbrace{(x_\beta^{-1}\circ x_\alpha)(v_\alpha)}_{\text{klassisch: } D(\underline{x}_\beta^{-1}\circ x_\alpha)v_\alpha})$$

diff'bar bzgl. q_α, v_α



$$d(\underline{x}_\beta^{-1}\circ\underline{x}_\alpha)(v_\alpha) = v_\beta$$

$\Rightarrow$ ii), Def. 1. $\square$

Reguläre Flächen im $\mathbb{R}^N$

$M^{(k)} \subset \mathbb{R}^N$ heißt reguläre Fläche der Dimension $k \leq N$, falls gilt: Zu jedem $p \in M^{(k)}$ gibt es eine $\mathbb{R}^N$-Umgebung V von p und eine Abbildung

$$\underline{x} : \mathbb{R}^k \supset_{\text{offen}} \mathcal{U} \to M^{(k)} \cap V \subset \mathbb{R}^N$$

mit i.) $\underline{x}$ ist diff'barer Homöomorphismus

ii.) $(d\underline{x})_q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ ist injektiv $\forall q \in \mathcal{U}$.

Bem. Analog zum Fall $k=2$, $N=3$ ist der Parameterübergang ein Diffeomorphismus.

$M^{(k)}$ ist diff'bare Mannigfaltigkeit der Dimension k & $i : M^{(k)} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ ist Einbettung, d.h. $M^{(k)}$ ist Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

Urbild eines regulären Wertes. Es sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ diff'bar.

$p \in \mathcal{U}$ heißt ~~k~~ kritischer Punkt von F, falls $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nicht surjektiv ist.

Im diesen Fall heißt $F(p)$ **kritischer Wert** von F.

Ist a kein kritischer Wert von F, so heißt a **regulärer Wert** von F.

Ist $a \in F(\mathcal{U})$ regulärer Wert von F, so ist $F^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ eine reguläre Fläche der Dimension $k = n - m$.

Beweis. Satz über inverse Fkt. $\boxtimes$

↓ 12.03.13

Orientierung

Definition 7. Es sei M eine diff'bare Mgfkt. M heißt **orientierbar**, falls es auf M eine diff'bare Struktur gibt, sodass:

$\forall \alpha, \beta$ mit $\underline{x}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \cap \underline{x}_\beta(\mathcal{U}_\beta) =: W \neq \emptyset$ (*)

hat das Differential des Koordinatenwechsels $\underline{x}_\beta^{-1} \circ \underline{x}_\alpha$ positive Determinante.

Andernfalls heißt M **nicht orientierbar**.

Ist M orientierbar, so heißt die Wahl einer diff'baren Struktur mit (*) eine <u>Orientierung</u> von M.
Mit dieser Wahl ist <u>M orientiert</u>.

Zwei diff'bare Strukturen, die (*) genügen, bestimmen dieselbe Orientierung, falls ihre Vereinigung ebenfalls (*) erfüllt.

<u>Bem.</u> Bel. M_1, M_2 diff'bare Mfkten, $\varphi: M_1 \to M_2$ Diffeomorphismus. Dann gilt

$$M_1 \text{ orientierbar} \Longleftrightarrow M_2 \text{ orientierbar}.$$

Sind M_1, M_2 zshgd. und orientiert, so induziert φ eine Orientierung auf M_2, die entweder mit der Orientierung von M_2 übereinstimmt (φ <u>orientierungserhaltend</u>) oder nicht (φ <u>orientierungsumkehrend</u>)

<u>Beispiele</u> i.) Kann M durch zwei Koordinatenumgebungen V_1, V_2 überdeckt werden, sodass $V_1 \cap V_2$ zusammenhängend ist, so ist M orientierbar.
Es gilt nämlich:

Auf $V_1 \cap V_2$ ist die Determinante des Differentials des Koordinatenwechsels $\neq 0$.

$V_1 \cap V_2$ zshg.: $\det > 0$ ✓

oder $\det < 0$

↑ ändere das Vorzeichen einer Koordinate einer Param. ✓

ii.) Die n-Sphäre

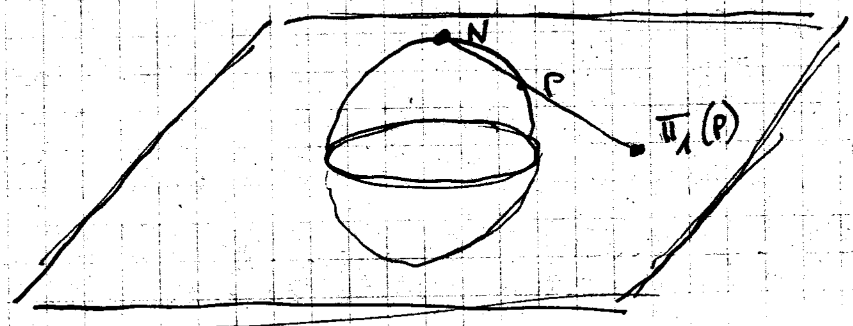
$$S^n := \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

ist orientierbar.

Betr. dazu den Nordpol $N = (0, 0, \dots 0, 1)$, den Südpol $S = (0, \dots 0, -1)$, sowie die stereographische Projektion vom Nordpol (analog vom Südpol)

$$\pi_1 : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$$

$$\pi_1(x_1 \dots x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$



⇝ Übung.

Betrachte nun die <u>Antipoden-Abbildung</u> $A : S^n \to S^n$

$$S^n \ni p \longmapsto A(p) := -p \in S^n.$$

A ist diff'bar mit $A^2 = id$, d.h. A ist Diffeomorphismus.

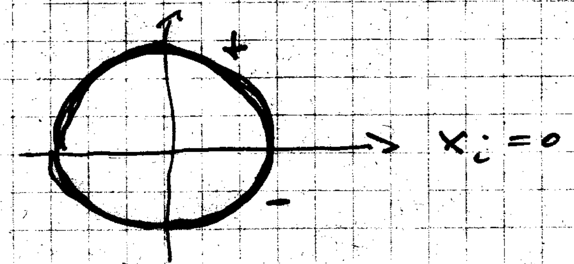
Ist n gerade, so ist A orientierungsumkehrend,

n ungerade, so ist A orientierungserhaltend.

iii) Eine <u>weitere Beschreibung des projektiven Raums</u>:

$$P^n(\mathbb{R}) = S^n / A.$$

<u>Geometrische Idee</u>. Schreibe die obere und untere Hemisphäre über $\{x_i = 0\}$ als Graph $(\underline{x}_i^+, \underline{x}_i^-)$



Betrachte dann die kanonische Projektion

$$\pi : S^n \to P^n(\mathbb{R}),$$

$$\pi(p) = \{p, -p\} = [p] = [-p]$$

$\underline{y}_i := \pi \circ \underline{x}_i^+$ $\leadsto$ Übung.

Es gilt: $P^n(\mathbb{R})$ ist orientierbar $\Longleftrightarrow$ n ist ungerade.

iv.) Verallgemeinerung von iii.):

Diskontinuierliche Gruppen-Aktionen

Eine Gruppe G operiert auf einer diff'baren Mfkt M, falls es eine Abb. $\varphi : G \times M \to M$ gibt mit:

a) $\forall g \in G$ ist $\varphi_g : M \to M$, $\varphi_g(p) = \varphi(g,p)$ $(=: gp)$ Diffeomorphismus & $\varphi_e = Id$

b) $g_1, g_2 \in G \Rightarrow \varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$

↖ Verträglichkeit mit Gruppenaktion

Die Gruppen-Aktion heißt eigentlich diskontinuierlich, wenn es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung U von p in M gibt mit: $U \cap g(U) = \emptyset$ $\forall g \in G \setminus \{e\}$.

⇝ Äquivalenzrelation "$\sim$" auf M

$$p_1 \sim p_2 : \quad p_2 = g p_1 \quad \text{für ein } g \in G.$$

$\pi : M \to M/G$ (Quotientenraum bzgl. "$\sim$") Projektion von M auf M/G.

Bsp. $P^n(\mathbb{R}) = S^n/G$, $G = \{Id, A\}$.

(⇝ ganzzahlige Translationen, Kleinsche Flasche, Möbiusband ...)

Ende Bsp-Sammlung ✓