Vektorfelder

Definition 8. Ein Vektorfeld $\underline{X}$ auf einer diff'baren Mgfkt. M ist eine Abbildung, die jedem $p \in M$ einen Tangentialvektor $\underline{X}(p) \in T_pM$ zuordnet, d.h. $\underline{X} : M \longrightarrow TM$,

wobei für die kanonische Projektion

$$\pi : TM \to M, \quad (p,v) \longmapsto p = \pi(p,v)$$

gilt

$$\pi \circ \underline{X} = \mathrm{id}_M .$$

Ein Vektorfeld $\underline{X}$ heißt genau dann diff'bar, wenn

$\underline{X} : M \to TM$ differenzierbar ist.

← diff'bare Struktur (→ Bsp. oben)

Es sei nun eine Parametrisierung $\underline{x} : \mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow M$

fixiert $\longleftrightarrow$ Im Folgenden oft etwas unsauber $f = f \circ \underline{x}$

Dann kann $\underline{X}$ als

$$\underline{X}(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \qquad (3)$$

geschrieben werden $\left(a_i : U \to \mathbb{R}, \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\} \text{ zu } \underline{x} \text{ assoziierte Basis}\right)$

Es gilt (vgl. Diskussion diff'bare Struktur auf TM)

$$\underline{X} \text{ diff'bares Vektorfeld} \Leftrightarrow a_i \text{ diff'bar}, \quad i=1,\dots n.$$

Alternative Betrachtungsweise. ($\rightsquigarrow$ Def. Tangentenvektor)

$\mathcal{D} := \{$ diff'bare Fkt. auf $M\}$

$\mathcal{F} := \{$ Fkt auf $M\}$

Ist $\underline{X}$ VF auf M, so kann $\underline{X}$ aufgefasst werden als Abb. $\underline{X}: \mathcal{D} \to \mathcal{F}$

$$\left(\underline{X}(f)\right)(p) := \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \qquad (4)$$

$\underline{X}$ ist diff'bares VF $\Leftrightarrow$ $\underline{X}: \mathcal{D} \to \mathcal{D}$.

Sei nun $\varphi: M \to M$ ein Diffeomorphismus, $v \in T_pM$, f diff'bar in einer Umgebung von $\varphi(p)$.

Dann gilt für $\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$, $\alpha'(0) = v$, $\alpha(0) = p$

$$d\varphi(\underset{\substack{\uparrow\\ \alpha'}}{v})(f)_{|\varphi(p)} = \frac{d}{dt}\left(f \circ \underbrace{(\varphi\circ\alpha)}_{\beta'(t)}\right)_{|t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left((f\circ\varphi)\circ\alpha\right)_{t=0}$$

$$= [v(f\circ\varphi)](p), \text{ d.h.}$$

$$\left[d\varphi(v)(f) \right](\varphi(p)) = \left[v(f\circ\varphi)\right](p). \qquad (5)$$

Nun werden, wie bereits angedeutet, diff'bare Vektorfelder $\underline{X}, \underline{Y}$ als Abbildungen $D \to D$ aufgefasst.

Mit dieser Interpretation kann iteriert werden:

$$\underline{X}\,\underline{Y} : D \xrightarrow{\underline{Y}} D \xrightarrow{\underline{X}} D ;$$
$$\underline{Y}\,\underline{X} : D \xrightarrow{\underline{X}} D \xrightarrow{\underline{Y}} D .$$

In $\underline{X}\,\underline{Y}$ & $\underline{Y}\,\underline{X}$ treten aber <u>höhere Ableitungen</u> auf, wobei es sich i.A. <u>nicht mehr um VF</u> handelt.
(als Operatoren trotzdem definiert)

[,] erzeugt wieder Vektorfeld (→ Tangentialraum) → <u>natürliche Operation</u>

Es gilt aber:

<u>**Lemma 1.**</u> Es seien $\underline{X}, \underline{Y}$ diff'bare Vektorfelder auf einer diff'baren Mannigfaltigkeit M. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes <u>Vektorfeld</u>$^{\triangledown}$

vorl. ↓ Symmetrie der 2ten Abl.: Höhere Abl. fallen weg → VF

$$Z = [\underline{X}, \underline{Y}] := \underline{X}\,\underline{Y} - \underline{Y}\,\underline{X}.$$

→ T_pM über Abl. def. $\triangledown$

$[\underline{X}, \underline{Y}]$ heißt die <u>(Lie) Klammer</u> von $\underline{X}$ & $\underline{Y}$.

<u>Beweis.</u> i.) Ann. Z ist diff'bares VF. Bel. <u>Eindeutigkeit.</u>

Für $p \in M$ & eine Parametrisierung $\underline{x} : U \to M$ bei p.

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \,, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

Sei $f \in D$.

$$XYf = X\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{ij} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{ij} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$YXf = Y\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{ij} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{ij} b_j a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\Rightarrow \quad Zf = [X,Y]f = \sum_{ij}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (6)$$

und das Feld ist - falls existent - eindeutig bestimmt.
(bzgl. $\underline{x}$ & damit auf M)

ii.) <u>Existenz.</u>

Man definiere Z_α auf einer Koordinatenumgebung $\underline{x}_\alpha(U_\alpha)$ einer diff'baren Struktur $\{(\underline{x}_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ mittels (6).

$\nwarrow M$

Ist $\underline{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \underline{x}_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, so ist dort $Z_\alpha = Z_\beta$.

Damit ist Z auf ganz M definiert. $\square$

Die Lie-Klammer kann als <u>Produkt auf dem Vektorraum der diff'baren Vektorfelder</u> aufgefaßt werden. Man erhält das so genannte <u>Liesche Klammerprodukt</u> mit den Eigenschaften:

<u>Satz 4.</u> Es seien X, Y, Z diff'bare VFe auf M, $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in D$. Dann gilt:

i.) $[X, Y] = -[Y, X]$ (<u>Antikommutativität</u>)

ii.) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (<u>Linearität</u>)

iii.) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (Jacobi-Identität)

iv.) $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

<u>Beweis.</u> i.), ii.) ✓

ad iii.) Es ist

$$[[X,Y],Z] = [XY - YX, Z] \overset{\text{Def } [\cdot,\cdot]}{=} XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

und

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] = XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY$$

andere Terme mit neg. Vorz.

$\Rightarrow$ iii.)

ad iv.) Schließlich gilt

$$[f\underline{X}, g\underline{Y}] = f\underline{X}(g\underline{Y}) - g\underline{Y}(f\underline{X})$$
$$= fg\underline{X}\,\underline{Y} + f\underline{X}(g)\underline{Y} - gf\underline{Y}\,\underline{X} - g\underline{Y}(f)\underline{X}$$
$$= f\cdot g\,[\underline{X}, \underline{Y}] + f\underline{X}(g)\underline{Y} - g\underline{Y}(f)\underline{X}.$$

$\boxed{3}$

Bemerkungen. i.) Allgemein heißt ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Lieschen Klammerprodukt, d.h. einem Produkt, welches i.)-iii) erfüllt, eine Lie-Algebra.

ii.) Ist $\underline{x} : \mathcal{U} \to M$ eine Parametrisierung, so sind $\underline{X}_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ VFe auf $\underline{x}(\mathcal{U})$.

Aus (6) folgt $\quad [\underline{X}_i, \underline{X}_j] = 0 = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]$.

Geometrische Interpretation der Lie-Klammer.

Der fundamentale Satz über Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von den Anfangsdaten für gew. DGl. (lokal) impliziert:

<u>Theorem M.</u> Es sei X ein diff'bares Vektorfeld auf einer diff'baren Mannigfaltigkeit M und es sei $p \in M$. Dann gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von p in M, $\delta > 0$ und ein Intervall $(-\delta, \delta)$ sowie eine diff'bare Abbildung

$$\varphi : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M,$$

sodass die <u>Kurve</u>

$$(-\delta, \delta) \ni t \mapsto \varphi(t, q) \quad , \quad q \in \mathcal{U},$$

die eindeutig bestimmte Kurve α ist mit

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)) \quad , \quad \alpha(0) = q.$$

X überall Richtung Kurve durch q

<u>Bemerkung.</u> Eine solche Kurve heißt <u>Trajektorie</u> des Vektorfeldes X durch $q = \alpha(0)$.

Man schreibt $\varphi_t(q) := \varphi(t, q)$

und nennt

$$\varphi_t : \mathcal{U} \to M$$

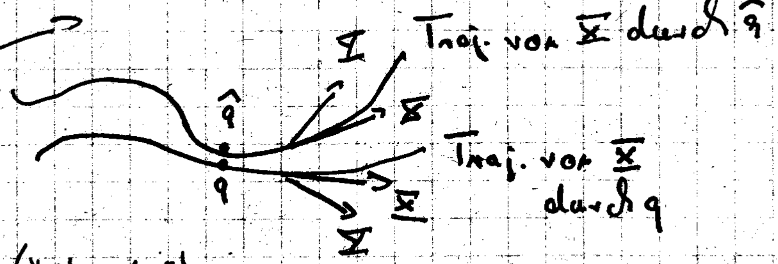
den <u>lokalen Fluss</u> zu X.

Satz 5. Es seien X, Y diff'bare Vektorfelder auf einer diff'baren Mannigfaltigkeit M, $p \in M$, und φ_t der lokale Fluss zu X auf einer Umgebung U von p in M. Dann ist

Y wird mit dem Fluss transportiert

$$[X, Y](p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(Y - d\varphi_t Y \right) (\varphi_t(p)).$$

relative Abweichung zwischen Y und Y mit Fluss transportiert ("1. Ordnung") längs Trajektorie



Zum Beweis benötigt man

Lemma 2. Es sei $h : (-\delta, \delta) \times U \to \mathbb{R}$ diff'bar mit $h(0, q) = 0 \; \forall q \in U$.

Dann gibt es eine diff'bare Funktion $g : (-\delta, \delta) \times U \to \mathbb{R}$ mit

$$h(t, q) = t \, g(t, q),$$

insbesondere ist

$$g(0, q) = \frac{\partial h(t, q)}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

Beweis des Lemmas

Man setzt für $\tau \in (-\delta, \delta)$

$$g(\tau, q) := \int_0^1 \frac{\partial h(\tau s, q)}{\partial t}\, ds .$$

Ist $\tau = 0$, so ist

$$g(0, q) = \frac{\partial h}{\partial t}(0, q) .$$

Für $\tau \neq 0$ erhält man mit $t = \tau s$ und $ds = \tau^{-1} dt$:

$$\tau\, g(\tau, q) = \int_0^\tau \frac{\partial h}{\partial t}(t, q)\, dt = h(\tau, q) - h(0, q)$$

$$= h(\tau, q) \qquad \square$$

Beweis des Satzes.

Es sei f diff'bar bei p, setze

$$h(t, q) = f(\varphi_t(q)) - f(q), \qquad \underbrace{(f \circ \varphi_t)(q) = f(q) + t\, g(t, q)}_{\text{nach Lemma 2}}$$

Die Gleichheit (5) impliziert

$$\big((d\varphi_t(Y))(f) \big)(\varphi_t(p)) = \big(Y (f \circ \varphi_t) \big)(p)$$

$$= \underbrace{(Y f)(p) + t\, (Y g(t, p))}$$

Es folgt

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[Y - d\varphi_t Y \right](f)(\varphi_t(p)) = \lim_{t \to 0} \frac{(Yf)(\varphi_t(p)) - (Yf)(p)}{t} - (Yg)(0, p)$$

$$= \big(X (Y f) \big)(p) - \big(Y (X f) \big)(p) = \big([X, Y](f) \big)(p).$$

$$\frac{d}{dt} (Yf)(\varphi_t)\Big|_{t=0} \qquad\qquad Y\Big(\frac{d}{dt} \underbrace{(f(\varphi_t))}_{X(f)} \Big) \qquad \square$$

Abl. in Richtung X

Abschlussbemerkungen

Bemerkungen zur Topologie diff'barer Mannigfaltigkeiten

Man muss zwei Forderungen stellen:

(H) M muss ein Hausdorff-Raum sein, d.h.
zu $p, q \in M$, $p \neq q$, gibt es Umgebungen
$\mathcal{U}(p)$ & $\mathcal{U}(q)$ mit $\mathcal{U}(p) \cap \mathcal{U}(q) = \emptyset$.

(B) M muss eine abzählbare Basis besitzen,
d.h. M kann durch abzählbar viele
Koordinatenumgebungen überdeckt werden.

Aus (H) folgt insbesondere, dass Grenzwerte konvergenter Folgen eindeutig bestimmt sind.
Aus (B) folgt die Existenz einer diff'baren
Zerlegung der Eins:

M sei diff'bare Mannigfaltigkeit. Eine Familie $\{V_\alpha\}$ offener Mengen mit $\bigcup_\alpha V_\alpha$ heißt lokal endlich, falls:
Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Umgebung W, sodass
$W \cap V_\alpha \neq \emptyset$ für nur endlich viele α.

Zu $f : M \to \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{spt} f = \operatorname{clos}\{p \in M : f(p) \neq 0\}$$

der Träger von f.

Eine Familie $\{f_\alpha\}$ diff'barer Abbildungen $f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ heißt diff'bare Zerlegung der Eins, falls gilt:

z.B. nötig für Existenz Riemannscher Struktur

i.) Für jedes α ist $f_\alpha \geq 0$ und

$$\operatorname{spt} f_\alpha \subset V_\alpha = x_\alpha(U_\alpha),$$

wobei $\{(x_\beta, U_\beta)\}_\beta$ diff'bare Struktur von M ist.

ii.) $\{V_\alpha\}$ ist lokal endlich.

iii.) Für jedes $p \in M$ ist $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$.

Bezeichnung: Zerlegung der Eins relativ zur Überdeckung $\{V_\alpha\}$

Theorem B. Eine diff'bare Mfkt besitzt eine diff'bare Zerlegung der Eins genau dann, wenn jede Zusammenhangskomponente von M ein Hausdorff-Raum ist und eine abzählbare Basis besitzt.

Theorem (Whitney 1936) Jede diff'bare Mfkt mit (H) & (B) der Dimension n besitzt eine Immersion im $\mathbb{R}^{2n}$ und eine Einbettung im $\mathbb{R}^{2n+1}$ — ist in $\mathbb{R}^{2n}$ eingebettet