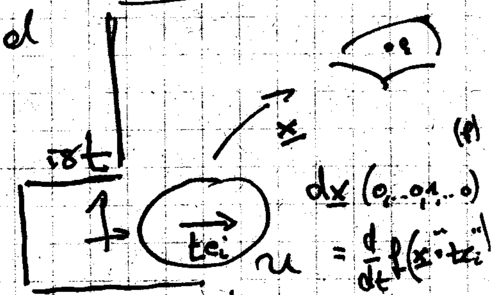
Kap. 2. Riemannsche Metriken

Definition 1. Eine Riemannsche Metrik auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Zuordnung, die jedem $p \in M$ ein inneres Produkt, d.h. ein Skalarprodukt, d.h. eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle \cdot , \cdot \rangle_p$ auf dem Tangentialraum T_pM zuordnet, sodass die Abbildung $p \longmapsto \langle \cdot , \cdot \rangle_p$ im folgenden Sinne differenzierbar ist:

Ist $\underline{x} : \mathbb{R}^n \supset U \to M$ ein Koordinatensystem bei p mit $\underline{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in \underline{x}(U)$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\underline{x}_q(0, \dots 0, 1, 0 \dots 0), \text{ so ist}$$



$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = \underbrace{g_{ij}(x_1, \dots, x_n)}_{\in \mathbb{R}, \text{ hängt von } q \text{ ab}}$$

differenzierbar auf U. vgl. Fläch.: Lef. in Koordinatendarstellung

Eine diff'bare Mgfkt M versehen mit einer Riemannschen Metrik heißt Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Bemerkungen. i.) Da der Kartenwechsel diff'bar ist, hängt die Definition nicht von der Wahl der Koordinaten ab.

ii.) Äquivalent kann gefordert werden, dass für alle diff'baren VFen $\underline{X}, \underline{Y}$ auf einer Umgebung $V \subset M$ $\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle$ diff'bar auf V ist.

iii.) $g_{ij} = g_{ji}$ heißt die lokale Darstellung der Riemannschen Metrik bzgl. des Koordinatensystems $\underline{x} : U \to M$.

Identifizierung Riemannscher Mannigfaltigkeiten?

Definition 7. Es seien M, N Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Ein Diffeomorphismus $f : M \to N$ heißt Isometrie zwischen M & N, falls

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \quad \forall p \in M, \ u, v \in T_pM \quad (1)$$

Eine diff'bare Abb. $f : M \to N$ heißt lokale Isometrie bei $p \in M$, falls es eine Umgebung V von p in M gibt, sodass $f_{|V} : V \to f(V)$ eine Isometrie ist.

__Bemerkung.__ Dementsprechend heißt M lokal isometrisch zu N, falls es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung V von p in M und eine lokale Isometrie $f: V \to f(V) \subset N$ gibt.

__Beispiele.__ i.) __n-dim Euklidische Raum__ $M = \mathbb{R}^n$.

Man identifiziert $\frac{\partial}{\partial x_i}$ mit $e_i = (0, \ldots 0, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1}, 0 \ldots 0)$,

die Metrik ist $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

ii.) __Immersierte Mannigfaltigkeiten__

Es sei $f: M^{(n)} \to N^{(n+k)}$ eine Immersion

(f diff'bar & $df_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ injektiv für jedes $p \in M$).

Ist N eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so __induziert__ N eine Riemannsche Struktur auf M vermöge

$$\langle u, v \rangle_p^M := \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}^N \quad \forall u, v \in T_pM.$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle^M$ positiv definit, da df_p injektiv und $\langle \cdot, \cdot \rangle^N$ positiv definit ist. (vgl. Fläche in $\mathbb{R}^3$)

Hier ist $f: M \to N$ eine lokal isometrische Immersion.

Spezialfall. $h: M^{(m+n)} \to N^{(n)}$ sei diff'bar.

M sei Riemannsche Mfkt, N diff'bar und

$q \in N$ reguläre Wert von h ($dh_p : T_pM \to T_{h(p)}N$ surjektiv

$\forall\, p \in h^{-1}(q)$)

Man kann zeigen: $h^{-1}(q) \subset M$ ist diff'bare Untermgfkt. der dim. m.

$i: h^{-1}(q) \hookrightarrow M$ induziert Riemannsche Metrik auf $h^{-1}(q)$.

Beispielsweise: $h: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $h(x_1, \dots, x_{n+1}) := \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1$.

0 ist reguläre Wert, $h^{-1}(0) = S^n$: Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$

Die auf S^n induzierte Metrik heißt <u>kanonische Metrik</u> auf S^n.

iii.) Lie Gruppen.

Eine <u>Lie-Gruppe</u> ist eine Gruppe G mit einer differenzierbaren Struktur, sodass die Abbildung

$$G \times G \to G, \quad (x,y) \longmapsto x y^{-1}$$

für $x, y \in G$ differenzierbar ist.

$y := x^{-1}z$, $L_x(y) = z$

für x, bel. $z \in G$

Es folgt, dass <u>Linkstranslationen</u> $L_x : G \to G$, $L_x(y) = xy$ und <u>Rechtstranslationen</u> $R_x : G \to G$, $R_x(y) = yx$ Diffeomorphismen sind.

Eine Riemannsche Metrik auf G heißt <u>links-invariant</u>, falls L_x für alle $x \in G$ eine Isometrie ist, d.h.

$$\langle u, v\rangle_y = \langle d(L_x)_y u,\ d(L_x)_y v\rangle_{L_x(y)} \quad \forall x, y \in G,\ u, v \in T_yG.$$

Analog: <u>rechts-invariant</u> $:\Leftrightarrow$ R_x ist Isometrie $\forall x \in G$

<u>biinvariant</u> $:\Leftrightarrow$ rechts- & links-invariant.

Ein diff'bares VF $\overline{X}$ auf einer Lie-Gruppe G heißt <u>links-invariant</u>, falls $dL_x \overline{X} = \overline{X}$ für jedes $x \in G$.

<u>Genauer</u>: $\forall x, y \in G$ gilt $\boxed{(dL_x)_y \overline{X}(y) = \overline{X}(L_x(y))}$

e $\qquad L_x(e) = x$

<u>Beobachtung</u>: <u>Links-invariante Vektorfelder sind vollkommen bestimmt durch den Wert in einem Pkt</u> (z.B. e)

nach L. Bl.

$\leadsto$ Auf T_eG kann eine zusätzliche Struktur eingeführt werden:

transportiere $\overline{X}_e$ mit Links- $\leadsto$ VF auf G

(*) $\quad T_eG \ni \overline{X}_e \longmapsto \overline{X}$ mit $\overline{X}(a) := d(L_a)_e \overline{X}_e$, $\quad (\overline{X}(e) = \overline{X}_e)$

jedem $\overline{X}_e \in T_eG$ wird also ein links-invariantes Vektorfeld zugeordnet. Es gilt nämlich:

$$\underline{d(L_x)_y \, \overline{X}(y)} = d(L_x)_y \left[d(L_y)_e \overline{X}_e \right] \quad \text{(Def } \overline{X}(y)\text{)}$$

$L_x(L_y(.)) = L_{xy}(.)$

$$= d(L_{xy})_e \overline{X}_e = \overline{X}(xy) \quad \text{(Def. } \overline{X}(xy)\text{)}$$

$$= \underline{\overline{X}(L_x(y))}.$$

Lie-Klammer links-invarianter V.F.:

Seien $\overline{X}, \overline{Y}$ links-invariante V.F. auf G. Für $x \in G$, $f: G \to \mathbb{R}$

gilt: $\{ \underbrace{dL_x}_{d\varphi} \underbrace{[\overline{X}, \overline{Y}]}_{(v)} \} f = [\overline{X}, \overline{Y}] (f \circ L_x)$ ✓ $(f \circ \varphi)$

(5), p.33

$$\overset{\text{Def } [\,,\,]}{=} \overline{X}(\overline{Y}(f \circ L_x)) - \overline{Y}(\overline{X}(f \circ L_x))$$

wieder $\overline{Y}(f \circ L_x) = dL_x(Y(f))$

$$= \overline{X} \underbrace{(dL_x Y)}_{= \overline{Y}} f - \overline{Y} \underbrace{(dL_x \overline{X})}_{= \overline{X}} f \quad \text{links-inv.}$$

$$= (\overline{X}\,\overline{Y} - \overline{Y}\,\overline{X}) f = [\overline{X}, \overline{Y}] f.$$

D.h. Die Lie-Klammer von zwei links-invarianten Vektorfeldern ist selbst ein links-invariantes Vektorfeld.

Seien nun $X_e, Y_e \in T_e G$. Setze

$$[X_e, Y_e] := [X, Y]_e,$$

Mit dieser Operation heißt $T_e G$ die Lie-Algebra von G,

Bezeichnung: $\mathfrak{g}$ ($= T_e G$)

Die Elemente von $\mathfrak{g}$ werden alternativ als Vektoren im $T_e G$ oder als links-invariante VFn auf G interpretiert.

Links-invariante Metrik auf G:

Wähle auf $\mathfrak{g}$ ein beliebiges Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$ und setze

$$\langle u, v\rangle_x := \langle (dL_{x^{-1}})_x(u), (dL_{x^{-1}})_x(v)\rangle_e \qquad (2)$$

$$x \in G, \quad u, v \in T_x G.$$

Da L_x Diffeomorphismus ist, entsteht tatsächlich eine Riemannsche Metrik.

Beobachtung: $\forall x, y \in G$, $u, v \in T_y G$ gilt

$$\langle u, v\rangle_y = \langle (dL_{y^{-1}})_y(u), (dL_{y^{-1}})_y(v)\rangle_e \quad \text{sowie}$$

$\to$ Def. links-invariant

$$\langle (dL_x)_y(u), (dL_x)_y(v) \rangle_{L_x(y)}$$

$$\overset{\text{Def. (2)}}{=} \langle (dL_{(xy)^{-1}})_{xy} (dL_x)_y(u), (dL_{(xy)^{-1}})_{xy} (dL_x)_y(v) \rangle_e$$

$$= \langle d(L_{y^{-1}x^{-1}} \circ L_x)_y(u), d(L_{y^{-1}x^{-1}} \circ L_x)_y(v) \rangle_e$$

$$= \langle (dL_{y^{-1}})_y(u), (dL_{y^{-1}})(v) \rangle_e = \langle u, v \rangle_y ,$$

d.h. die Metrik ist links-invariant.

Analog definiert man eine rechts-invariante Metrik.

Bem. Ist G eine zshg. kompakte Lie-Gruppe, so existiert auch eine biinvariante Metrik auf G.

Charakterisierung biinvarianter Metriken.

Besitzt G eine bi-invariante Metrik, so genügt das dadurch auf $\mathfrak{g}$ bestimmte Skalarprodukt der Gleichung

$$\langle [u, X], v \rangle = \langle u, [X, v] \rangle \quad \forall u, v, X \in \mathfrak{g}. \tag{3}$$

Bem. Umgekehrt impliziert (3), dass die durch (2) definierte Riem. Metrik bi-invariant ist.

Vorbemerkung zu (3).

Für jedes $a \in G$ ist $R_{a^{-1}} L_a : G \to G$,

$$R_{a^{-1}} L_a (g) = a g a^{-1},$$

ein Diffeomorphismus von G, der e fest lässt.

(Auf dem Gruppen-Niveau ist $R_{a^{-1}} L_a$ ein innerer Automorphismus.)

Das Differential $d(R_{a^{-1}} L_a)_e$ ist eine lineare Abbildung (sogar ein Homomorphismus auf der Lie-Algebra)

$$Ad(a) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Es gilt $\forall\, \underline{Y} \in \mathfrak{g}$

$\underline{Y}$ links-invariant

$$Ad(a)\,\underline{Y} = dR_{a^{-1}}\, dL_a \underline{Y} = dR_{a^{-1}} \underline{Y}$$

Schließlich sei x_t der Fluss zu $\underline{X} \in \mathfrak{g}$.
(vgl. pp. 37)

Satz 5, Kap. 1 $\Rightarrow$

$$[\underline{Y}, \underline{X}]_y = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(dx_t(\underline{Y}) - \underline{Y} \right)_{x_t(y)}.$$

Da $\underline{X}$ links-invariant ist, folgt (nachrechnen)

$$L_y \circ x_t(w) = x_t \circ L_y(w), \quad \text{d.h.}$$

$y \cdot$ Fluss an der Stelle w Fluss an der Stelle $y \cdot w$