$$x_t(y) = x_t(L_y e) = L_y(x_t(e)) = y\, x_t(e)$$
$$= R_{x_t(e)}\, y$$

bzw.
$$dx_t = dR_{x_t(e)}$$ „mit R nach e transportiert"

und folglich

$$\underline{\underline{[\bar Y, \bar X]}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(dR_{x_t(e)}(\bar Y) - \bar Y\right)$$
$$\underline{\underline{= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\mathrm{Ad}\left((x_t(e))^{-1}\right)\bar Y - \bar Y\right)}}.$$

<u>Zum Beweis von (3) für bi-invariante Metriken.</u>

Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bi-invariante Metrik auf der Lie-Gruppe G,
$\bar X, U, V \in \mathfrak{g}$ $(= T_e G)$.

$$\underline{\langle U, V\rangle} = \langle dR_{x_t(e)}\, dL_{(x_t(e))^{-1}} U, dR_{x_t(e)}\, dL_{(x_t(e))^{-1}} V\rangle$$

‖ Def. (2)

$$\langle dL_{(x_t(e))^{-1}} U, dL_{(x_t(e))^{-1}} V\rangle = \underline{\underline{\langle dR_{x_t(e)} U, dR_{x_t(e)} V\rangle}}.$$

+ rechts-invariant

↑ U, V links-invariant.

Diese Beziehung wird differenziert $\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right)$

und $\lim_{t\to 0} dR_{x_t(e)} = dR_e = Id_{\mathfrak{g}}$ liefert

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ \langle dR_{x_t(e)} U, dR_{x_t(e)} V \rangle - \langle U, V \rangle \right\}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ \langle dR_{x_t(e)} U - U, V \rangle + \langle dR_{x_t(e)} U, dR_{x_t(e)} V - V \rangle \right\}$$

$$= \left\langle \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(dR_{x_t(e)} U - U \right), V \right\rangle + \left\langle U, \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(dR_{x_t(e)} V - V \right) \right\rangle$$

$$= \langle [U, \overline{X}], V \rangle + \langle U, [V, \overline{X}] \rangle$$

$$= \langle [U, \overline{X}], V \rangle - \langle U, [\overline{X}, V] \rangle . \quad \boxed{R}$$

Weiter in Bsp. Riemannsche Metrik.

iv.) <u>Die Produkt-Metrik</u>

Es seien M_1, M_2 Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Betrachte die Produkt-Mgfkt $M_1 \times M_2$ (vgl. Übg. Kap. 1).

Betrachte weiter

$$\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i \quad , i = 1, 2,$$

und setze für $(p, q) \in M_1 \times M_2$ &

$u, v \in T_{(p,q)} (M_1 \times M_2)$

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v) \rangle_p + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v) \rangle_q .$$

Man erhält so eine Riemannsche Struktur auf $M_1 \times M_2$.

Bsp. Betr. den <u>n-Torus</u>

$$T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \dots \times S^1}_{n} ,$$

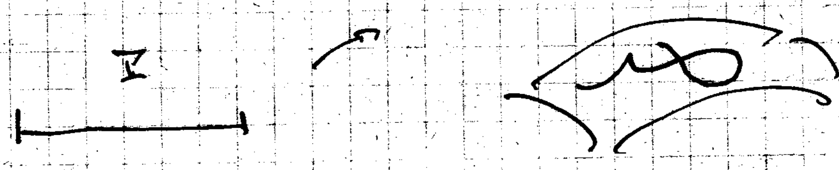
der zur Riemannschen Mannigfaltigkeit wird, indem $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit der induzierten Riemannschen Struktur versehen wird und dann die Produkt-Metrik betrachtet wird (flacher n-Torus).

Ende Bsp.

Längen von Kurven.

Definition 3. Eine diff'bare Abbildung $c : I \to M$ eines offenen Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ in eine diff'bare Mgflt M heißt <u>(parametrisierte) Kurve</u>.

Bemerkung Ecken, Spitzen, Selbstdurchschneidungen sind möglich. (vgl. Neilsche Parabel)



c nicht als "regulär" vorausges.

Definition 4. Ein **Vektorfeld V längs einer Kurve** $c : I \to M$ ist eine diff'bare Abbildung

$$I \ni t \longmapsto V(t) \in T_{c(t)} M,$$

wobei diff'bar bedeutet: Für jede diff'bare Funktion f auf M ist die Abbildung

$$I \ni t \longmapsto V(t) f$$

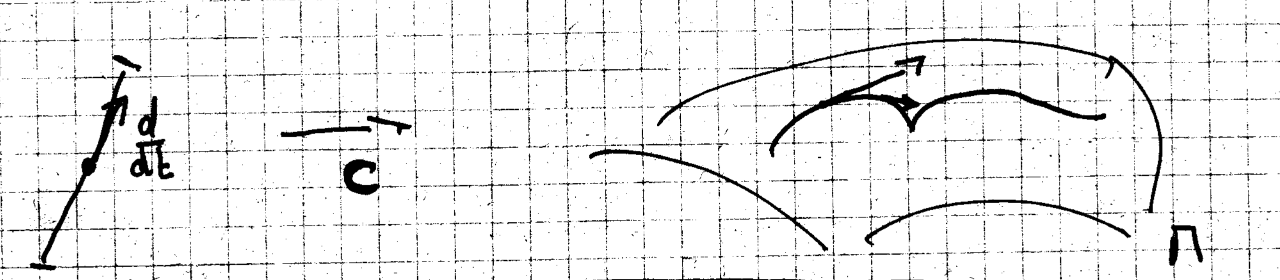
diff'bar.

Bezeichnungen. i.) Das Vektorfeld

$$\frac{dc}{dt} := dc\left(\frac{d}{dt}\right)$$

ist ein VF längs c und heißt

Geschwindigkeitsvektorfeld oder **Tangentenfeld** an c.



$\uparrow \alpha(t) = t$ $\qquad$ $Y^{-1} \circ \beta$ $\quad \nwarrow I$

I

$$dc(\alpha') : \frac{d}{dt}\left(f(\tilde{c}(t))\right)$$

$$= \tilde{c}_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f$$

$$\underline{\alpha'}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)$$

$$= \alpha' \frac{d}{dt} f = \frac{d}{dt}(f)$$

$$\frac{dc}{dt} := \tilde{c}_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ii.) Die Einschränkung einer Kurve c auf ein abgeschlossenes Intervall $[a,b] \subset I$ nennt man ein <u>Segment</u>.

iii.) Ist M eine Riemannsche Mgfkt, so wird die Länge eines Segments definiert als

$$l_a^b(c) := \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt.$$

Existiert überhaupt immer eine Riemansche Metrik?

<u>Satz 1.</u> Jede diff'bare Mgfkt M (Hausdorff mit abzählbarer Basis) kann mit einer Riemannschen Struktur versehen werden.

<u>Beweis.</u> Es sei $\{f_\alpha\}$ eine diff'bare Zerlegung der Eins auf M relativ zu einer Überdeckung $\{V_\alpha\}$ von M durch Koordinatenumgebungen. (vgl. p. 41)

Auf den V_α existiert die durch das System lokaler Koordinaten induzierte Riemannsche Metrik

$$\underline{x}_\alpha^{-1} : V_\alpha \to \mathbb{R}^n, \quad \langle u, v \rangle_p^\alpha := \underbrace{(d\underline{x}_\alpha^{-1})_p (u) \cdot (d\underline{x}_\alpha^{-1})_p (v)}_{\text{Euklidische Struktur des } \mathbb{R}^n}$$

Für $p \in M$ & $u, v \in T_p M$ setzt man

$$\langle u, v \rangle_p := \sum_\alpha f_\alpha(p) \langle u, v \rangle^\alpha_p .$$

Übung: Es handelt sich tatsächlich um eine Riemannsche Metrik auf M.

Volumen orientierter Mannigfaltigkeiten.

Es sei M eine orientierte Mgfkt. Wähle eine mit der Orientierung von M verträgliche Familie von Parametrisierungen. (positiv genannt)

Zu $p \in M$ sei $\underline{x}: \mathbb{R}^n \supset U \to M$

eine positive Parametrisierung bei p, $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine positive **ONB** von $T_p M$.

Es sei weiter $\underline{X}_i(p) := \frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$.

Es folgt

$$g_{ik}(p) = \langle \underline{X}_i, \underline{X}_k \rangle_p = \sum_{j,l} a_{ij} a_{kl} \langle e_j, e_l \rangle$$

Basis zu Messung in lokal Koord.

$$= \underbrace{\sum_j a_{ij} a_{kj}}_{(A^T A)_{ik}} .$$

Das Volumen des von den Vektoren $\underline{X}_1(p) \dots \underline{X}_n(p) \in T_pM$ gebildeten Parallelepipeds berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}\left(\underline{X}_1(p), \dots, \underline{X}_n(p)\right) &= \det(a_{ij})\, \mathrm{vol}(\underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{ONB}}) \\ &= \det(a_{ij}), \end{aligned}$$

d.h. $\underline{\underline{\mathrm{vol}\left(\underline{X}_1(p), \dots, \underline{X}_n(p)\right) = \sqrt{\det\left(g_{ij}(p)\right)}}}.$

Es sei nun $\underline{y} : \mathbb{R}^n \supset V \to M$ eine weitere positive Param. bei p,

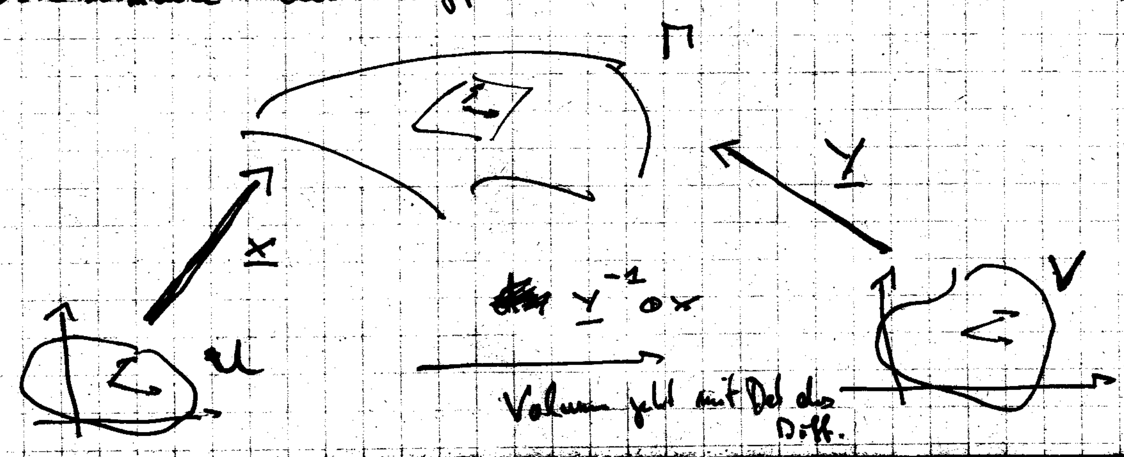
$$\underline{Y}_i(p) = \frac{\partial}{\partial y_i}(p), \quad h_{ij}(p) = \langle \underline{Y}_i, \underline{Y}_j \rangle_p, \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(g_{ij})}\underset{\uparrow\, x_1 \dots x_n}{(p)} &= \mathrm{vol}\left(\underline{X}_1(p), \dots, \underline{X}_n(p)\right) \\ &= J\, \mathrm{vol}\left(\underline{Y}_1(p), \dots, \underline{Y}_n(p)\right) \\ &= J \sqrt{\det(h_{ij})}\underset{\uparrow\, y_1 \dots y_n}{(p)}, \qquad (4) \end{aligned}$$

wobei $J = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \det\left(d\underline{y}^{-1} \circ dx\right)(p)$

> 0 (Orientierung)

die Determinante des Differentials des Koordinatenwechsels ist.



Schließlich sei $R \subset M$ ein Gebiet (offen, zshg.) mit kompaktem Abschluss.

Außerdem sei $R \subset \underline{x}(\mathcal{U})$ für eine positive Parametrisierung $\underline{x} : \mathcal{U} \to M$ und der Rand von $\underline{x}^{-1}(R) \subset \mathcal{U}$ habe Lebesgue-Maß Null im $\mathbb{R}^n$.

Dann wird das <u>Volumen</u> $\mathrm{vol}(R)$ von R definiert durch

$$\mathrm{vol}(R) := \int_{\underline{x}^{-1}(R)} \sqrt{g_{ij}}\, dx_1 \ldots dx_n .$$

Das Volumen ist wohldefiniert: Ist $R \subset \underline{y}(V)$, so folgt nämlich aus der Transformationsformel

$$\int_{\underline{x}^{-1}(R)} \underbrace{\sqrt{\det(g_{ij})}}_{J\sqrt{\det(h_{ij})}}\, dx_1 \ldots dx_n \overset{\text{Transf. } y^{-1}\circ x}{=} \int_{\underline{y}^{-1}(R)} \sqrt{\det(h_{ij})}\, dy_1 \ldots dy_n ,$$

$\det: J$

$\det J > 0$

d.h. die Definition des Volumens ist <u>unabhängig von der Wahl der Parametrisierung</u>.

<u>Bemerkungen.</u> i.) Aufgrund der Orientierbarkeit gibt es in den Betrachtungen kein Problem mit den Vorzeichen: $0 < J = |J|$.

ii.) Anhand von Formel (4) sieht man, dass

$$\sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \ldots dx_n = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

eine Differentialform vom Grad n auf M ist, die sogenannte <u>Volumenform</u> (<u>Volumenelement</u>)

Bezeichnung: ν

Ist $R \subset M$ kompakt mit $|x^{-1}(\partial R)| = 0$ für jede Parametrisierung, so betrachtet man eine Zerlegung der Eins $\{\varphi_i\}$ relativ zu einer endlichen Überdeckung von R durch Koordinatenumgebungen $\underline{x}_i(\mathcal{U}_i)$.

Man setzt

$$\mathrm{vol}(R) := \sum_i \int_{\underline{x}_i^{-1}(R)} \varphi_i\, \nu \quad ,$$

wobei die Definition unabhängig von der Wahl der Zerlegung der Eins ist. $\boxtimes$