Kap. 3. Der Zusammenhangbegriff

- **1917**: Levi-Civita führt den Begriff **Parallelität** ein.

- Äquivalente Idee im $\mathbb{R}^3$: Betr. $S \subset \mathbb{R}^3$ & eine parametrisierte Kurve $c: I \to S$ sowie ein Vektorfeld $V: I \to \mathbb{R}^3$ längs der Kurve & tangential zu S.

  Beobachtung: $\frac{dV}{dt}(t)$ gehört i.A. nicht mehr zu $T_{c(t)}S$,

  keine intrinsische Begriffsbildung!

  Ausweg: Betr. die orth. Projektion von $\frac{dV}{dt}$ auf $T_{c(t)}S$

  $\rightsquigarrow$ kovariante Ableitung $\frac{DV}{dt}$

  (Ableitung, die in S gesehen werden kann).

- Kovariante Ableitung: Hängt nur von der ersten Fundamentalform ab $\rightsquigarrow$ Riemannsche Geometrie.

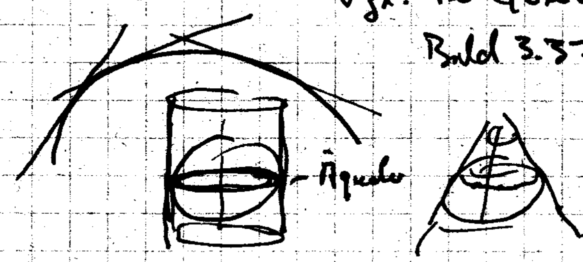
  $\rightsquigarrow$ Beschleunigung von Kurven, Geodätische, Gauß-Krümmung.

- Parallelität $\Leftrightarrow$ $\frac{DV}{dt} = 0$.

  $\uparrow$ historisch zuerst.

- Parallelität in $\mathbb{R}^n$: Bel. Fam. von Tangentialebenen an S längs der Kurve c.

vgl. Do Carmo Fläch Bild 3.37 p. 145



$\rightsquigarrow$ Fläche E als "Einhüllende"

E längs c tangential zu S, Gauß-Krümmung von E verschw. $K \equiv 0$.

Parallelität längs c identisch relat. zu S & E.

- E: $K \equiv 0$, d.h. lokal isometrisch zur Ebene.

Parallelität invariant unter Isometrie, d.h. über E auf Euklidische Fall und zurück zu S. $\rightsquigarrow$ Parallelverschiebung

z.B. auf Zylinder
do Carmo Fläch
Bsp. 2 p. 180.

- Kovariante Ableitung: Geodätische & Krümmung können in noch allgemeinerer Situation als Riemannsche Mfkt. definiert werden.

$\rightsquigarrow$ affiner Zusammenhang

Wahl Riemannscher Metrik bestimmt Zusammenhang.

Es sei im Folgenden

$$\mathfrak{X}(M) := \{ C^\infty\text{-Vektorfelder auf } M \}$$

$\mathfrak{D}(M)$: Ring der reellwertigen C^∞-Fkt. auf M.

"Connection": Differentiation von V.F. ⇝ Zusammenhang zwischen Tangentialebenen in versch. Pkt.

Definition 1. Ein *affiner Zusammenhang* ∇ (Ableitung)
auf einer diff'baren Mannigfaltigkeit M ist
eine Abbildung

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

natürliche Bedingungen für Ableitungen ∇:

$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

mit den folgenden Eigenschaften ($X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathfrak{D}(M)$)

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$,
← Richtung, in die differenziert wird (abhängig von p), "die Richtung wird nicht differenziert" ⇝ "Linearität"

ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
← Ableitung: Linear

iii) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)\, Y$.
← fY wird differenziert ⇝ "Produktregel"

konkrete Realisierung:

soweit existiert, sogar mit Symmetrie & Verträglichkeit, vgl. Hauptsatz dieses Kap.

<u>Satz 1.</u> Es sei M eine diff'bare Mannigfaltigkeit versehen mit einem affinen Zusammenhang ∇.
Dann gibt es zu jeder diff'baren Kurve $c: I \to M$ und zu jedem Vektorfeld längs c ein <u>eindeutig</u>

tangential!

<u>bestimmtes</u> Vektorfeld $\frac{DV}{dt}$ längs c – genannt die <u>kovariante Ableitung von V längs c</u> – mit den Eigenschaften: linear

i.) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ (W ebenfalls V.F. längs c)

ii.) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{d}{dt}f\,V + f\,\frac{DV}{dt}$ (f diff'bare Fkt. längs c)

"Produktregel"

iii.) Ist $Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $V = Y(c(t))$,

so ist

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y .$$

$\frac{D}{dt}$ kommt vom affinen Zshg.

Bemerkungen i.) Auf den ersten Blick ist

$\nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$ nicht sinnvoll definiert, da $\frac{dc}{dt}$ (lediglich längs Kurve definiert)

kein Vektorfeld auf M ist. siehe i.) Def. 1: gilt nur Abbildung an, in der diff. wird und wird nicht selbst diff.

also Beobachtung: $\nabla_X Y(p)$ hängt nur ab von $X(p)$

und den Werten von Y längs einer Kurve, die

tangential ist zu $X(p)$. ← vgl. Bem. Parallelität in Einleitung.

($\nabla_X Y$ ist insbesondere ein lokaler Begriff)

In der Tat wähle man lokale Koordinaten $(x_1 \dots x_n)$ bei p

und schreibe

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_j y_j X_j$$

$$\left(X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Dann gilt nach Definition 1:

$$\nabla_X Y \overset{i.)}{=} \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right)$$

$$\overset{ii.)\ iii.)}{=} \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \underbrace{\sum_{ij} x_i X_i(y_j) X_j}_{= \sum_j X(y_j) X_j}.$$

Wie bei Flächen: 2^{te} Abl. als Linearkomb.

1^{te} Abl. ~

Setze

$$\nabla_{\bar X_i} \bar X_j := \sum_k \Gamma_{ij}^k \bar X_k ,$$

$\nabla_{\bar X_i} \bar X_j$: Vektorfeld, also bzgl. Basis $\{\bar X_k\}$ darstellbar.

Γ_{ij}^k: Christoffel-Symbole

(diff'bar nach Vor.)

beachte: Hängen nicht von den speziellen VF ab: Nur bzgl. der Basisvektoren $\{\bar X_k\}$ nicht bzgl. der Koordinaten x_i definiert.

$\nabla_{\bar X_i} \bar X_j$ V.F.: kein Anteil "in N-Richt." vgl. Fläche

Es ergibt sich:

$$\boxed{\nabla_{\bar X} \bar Y = \sum_k \Big\{ \sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + \bar X(y_k) \Big\} \bar X_k} \qquad (1)$$

Insbesondere: $\nabla_{\bar X} \bar Y(p)$ hängt ab von $x_i(p), y_i(p)$ und der Ableitung $\bar X(y_k)(p)$ von y_k in Richtung $\bar X(p)$ (s.o.)

ii) Nach Satz 1. ermöglicht ein affiner Zshg. eine Ableitung von Vektorfeldern längs Kurven.

Ableitung des Tangentenvektors: • Beschleunigung
(Geschwindigkeitsvektor) • ~ Krümmung

Bew. von Satz 1.

- Eindeutigkeit: Es gebe eine kovariante Ableitung mit i.), ii.) & iii.).

Wähle ein Koordinatensystem $\underline{x}: \mathbb{R}^n \supset \mathcal{U} \to M$

mit $c(I) \cap \underline{x}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$.

Es sei $(x_1(t), \dots x_n(t))$ $(= \underline{x}^{-1} \circ c)$ die lokale

Darstellung von $c(t)$, $t \in I$. $\overline{X}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ wie üblich.

Schreibe (lokal)

$$V = \sum_j v^j \overline{X}_j \,, \quad v^j = v^j(t),$$

$$\overline{X}_j = \overline{X}_j(t).$$

Aus i.) & ii.) folgt

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} \overline{X}_j + \sum_j v_j \frac{D\overline{X}_j}{dt}$$

Aus iii.) & i.) folgt ~~dann~~

$$\frac{D\overline{X}_j}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} \overline{X}_j = \nabla_{\left(\sum_i \frac{dx_i}{dt} \overline{X}_i\right)} \overline{X}_j$$

$$= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{\overline{X}_i} \overline{X}_j$$

und dementsprechend

$$\underline{\underline{\frac{DV}{dt}}} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j$$

$$= \sum_k \left\{ \underbrace{\frac{dv^k}{dt}}_{\text{bestimmt durch } V} + \sum_{ij} \underbrace{\frac{dx_i}{dt}}_{\text{bestimmt durch } c} \underbrace{v^j}_{\text{bestimmt durch } V} \Gamma^k_{ij} \right\} X_k \qquad (2).$$

$\leadsto$ zu gegebenen V, c, $\frac{DV}{dt}$ bestimmt.

Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt.

- Existenz: Definiere $\frac{DV}{dt}$ über (2) und rechne i), ii), iii) nach (Übung).

Für zwei verschiedene Parametrisierungen folgt aus der Eindeutigkeit, dass die Definitionen auf dem Durchschnitt übereinstimmen. ☐

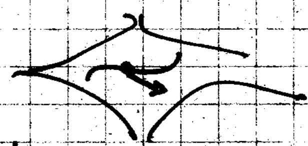
Parallelität (vgl. Einleitung)

Definition 2. Es sei M eine diff'bare Mgfkt mit affinem Zshg. ∇. Ein Vektorfeld V längs einer Kurve $c: I \to M$ heißt parallel, falls $\frac{DV}{dt} = 0 \quad \forall t \in I$.

<u>Satz 2.</u> Es sei M diff'bare Mgfkt, ∇ affiner Zsh.

Es sei $c : I \to M$ eine diff'bare Kurve

und $V_0 \in T_{c(t_0)} M$.



Dann gibt es ein <u>eindeutig bestimmtes</u> paralleles Vektorfeld V längs c mit $V(t_0) = V_0$.

Das Vektorfeld heißt <u>Parallelverschiebung</u> von V_0 längs c.

<u>Beweis.</u> Vorläufige Annahme: c verläuft in einer Parametrisierung: $c(I) \subset \mathbf{x}(U)$, $\mathbf{x} : \mathbb{R}^n \supset U \to M$.

Es sei weiter $\mathbf{x}^{-1}(c(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ die lokale Darstellung von c, $V_0 = \sum_j v_0^j \overline{X}_j$ mit $\overline{X}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\big|_{c(t_0)}$.

Falls ein paralleles Vektorfeld V längs c in $\mathbf{x}(U)$ existiert (mit $V(t_0) = V_0$), so muss gelten

$$0 = \frac{DV}{dt} \overset{(2)}{=} \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} v^i \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} \overline{X}_k$$

Es ist $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ eine Basis von $T_{c(t)}M$,

also erhält man ein System n gewöhnliche DGl. für $v^k(t)$:

$$\frac{dv^k}{dt} = -\sum_{ij} \Gamma^k_{ij} v^j \frac{dx_i}{dt}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

(3): <u>lineares System</u>: Standard Existenz- und Eindeutigkeitstheorem.

$\exists_1$ Lsg $v^k(t)$ mit $v^k(t_0) = v_0^k$, $k = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit & Existenz.

Nun sei $t_1 \in I$ beliebig (ohne Verlaufsannahme in einer Parametrisierung).

Das Segment $c([t_0, t_1]) \subset M$ kann durch endlich viele Koordinatenumgebungen überdeckt werden, die das Segment in endlich viele Teilstücke zerlegen.

Beginnend bei t_0 erhält man in die ersten Umgebung ein paralleles VF mit $V(t_0) = V_0$ und fährt dann induktiv fort (endlich oft).