Verträglichkeit eines affinen Zusammenhangs mit einer Riemannschen Struktur.

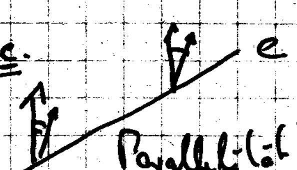
Definition 3. Es sei M eine diff'bare Mgfkt. mit affinen Zshg. ∇ und Riemannscher Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Der Zshg. heißt verträglich mit der Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$, falls:

Ist c eine glatte Kurve in M und sind P, P' parallele Vektorfelder längs c, so gilt

$$\langle P, P' \rangle = \text{konstant.}$$

Idee.



Parallelität über Zshg., „Winkel" über Metrik

Verträglichkeit $\longleftrightarrow$ Produktregel

Satz 3. Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist ein Zshg. ∇ auf M genau dann mit der Metrik verträglich, wenn für beliebige Vektorfelder V, W längs einer Kurve $c : I \to M$ gilt

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\langle V, W\rangle}_{\substack{\in\mathbb{R}\\ \text{für jedes } t}} = \Big\langle \underbrace{\frac{DV}{dt}}_{\text{tangential}}, W\Big\rangle + \Big\langle V, \underbrace{\frac{DW}{dt}}_{\text{tangential}}\Big\rangle \quad \forall\, t\in I \qquad (4)$$

<u>Beweis.</u> Fix. $c : I \to M$.

Gilt (4), so folgt für V, W parallel längs c:

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \underset{V \text{ parall. } \frac{DV}{dt}=0}{0}, W\rangle + \langle V, \underset{dito}{0}\rangle = 0.$$

Also ist ∇ verträglich mit der Riemannschen Struktur.

Sei nun umgekehrt ∇ verträglich mit der Riemannschen Struktur vorausges.

Wähle zu $t_0 \in I$ ONB $\{P_1(t_0), \ldots, P_n(t_0)\}$ von $T_{c(t_0)}M$.

<u>Satz 2.</u> $P_i(t_0)$, $i = 1, \ldots, n$ kann in eindeutiger Weise parallel längs c fortgesetzt werden: $P_i(t)$, $t \in I$.

Nach Vor.: ∇ verträglich mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d.h.

$$\{P_1(t), \ldots, P_n(t)\} \quad \text{ONB von } T_{c(t)}M \quad \forall t \in I.$$

Stelle V, W bzgl. dieser Basis dar:

$$V = \sum_i v^i P_i, \quad W = \sum_i w^i P_i, \quad v^i, w^i : I \to \mathbb{R} \text{ diffbar}.$$

Dann folgt (P_i parallel)

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i.$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_i \left\{ \frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i \right\} = \frac{d}{dt}\left\{\sum_i v^i w^i\right\}$$

$$= \frac{d}{dt}\langle V, W\rangle. \quad \square$$

<u>Korollar 1.</u> Ein Zshg. ∇ auf einer Riemannschen Mgfkt. M ist genau dann mit der Metrik verträglich, wenn für beliebige Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$\underbrace{X\langle Y, Z\rangle}_{\text{passt von der Def. her}} = \underbrace{\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle}_{\text{„kann nicht anders aussehen"}}. \quad (5)$$

<u>Beweis.</u> Es gelte zunächst (5). Für

$$X(t) = \frac{dc}{dt} \qquad \left(\langle Y, Z\rangle \leftrightarrow Y_i Z_i (c(t)) \leftarrow \frac{dc}{dt} \right)$$

gilt $\dfrac{DY}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y = \nabla_X Y$, analog für Z

$\Rightarrow$ (4).

Sei also nun ∇ verträglich mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Wähle $p \in M$ beliebig, $c : I \to M$ mit

$$c(t_0) = p, \quad \frac{dc}{dt}\Big|_{t=t_0} = c'(t_0) = X(p).$$

Dann gilt
$$X(p)\langle Y, Z\rangle = \frac{d}{dt}\langle Y, Z\rangle_{t=t_0}$$
$$= \left\langle \frac{DY}{dt}, Z \right\rangle_{t=t_0} + \left\langle Y, \frac{DZ}{dt} \right\rangle_{|t=t_0}$$
$$= \langle \nabla_{X(p)} Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z\rangle$$
$$= \langle \nabla_X Y, Z\rangle_p + \langle Y, \nabla_X Z\rangle_p.$$

$\boxtimes$

Symmetrie.

(vgl. Vertauschbarkeit 2ter Ableitg.)

Definition 4. Ein affiner Zshg. ∇ auf einer diff'baren Mgfkt M heißt *symmetrisch*, falls für alle Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\underbrace{\nabla_X Y - \nabla_Y X}_{\text{einzeln nicht gleich i.A.}} = [X, Y] \qquad (6)$$

Symm 1.

Bemerkungen. i.) Allgemein heißt

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

die Torsion eines Zshg. Für symmetrische Zshg. verschwindet also die Torsion.

ii.) In einem Koordinatensystem (x, U) gilt für $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$T(X_i, X_j) = \sum_k (\underbrace{\Gamma^k_{ij}}_{\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k} - \Gamma^k_{ji}) X_k - \underbrace{[X_i, X_j]}_{=0,\ p.36}.$$

Symmetrie eines Zshgs bedeutet also

$$\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i, \quad i, j = 1, \dots, n \qquad (6')$$

Symm 2.

bzw.

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}, \quad i, j, k = 1, \dots, n \qquad (6'')$$

Symm 3.

Der <u>Levi-Civita Zusammenhang</u> (oder <u>Riemannsche Zshg</u>) einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist eindeutig charakterisiert durch den Hauptsatz dieses Kapitels:

<u>Theorem.</u> (T. Levi-Civita, 1917).

Geg. sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M.

Dann gibt es einen <u>eindeutig bestimmten</u> affinen Zusammenhang mit den Eigenschaften:

i.) ∇ ist <u>symmetrisch</u>;

ii.) ∇ ist <u>verträglich mit der Riemannschen Metrik</u>.

<u>Beweis.</u> • <u>Eindeutigkeit</u>: Es existiere ein affiner Zshg mit i.) & ii.).

Dann gilt (Korollar 1, p. 72) ← Verträglichkeit

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad (7a)$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \quad (7b)$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \quad (7c)$$

(7a) + (7b) − (7c) liefert zusammen mit der Symmetrie:

$$\underline{X}\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle$$
$$= \langle \overset{\nabla_X Z - \nabla_Z X}{[X,Z]}, Y\rangle + \langle \overset{\nabla_Y Z - \nabla_Z Y}{[Y,Z]}, X\rangle + \langle \overset{\nabla_X Y - \nabla_Y X}{[X,Y]}, Z\rangle$$
$$+ 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle.$$

oder äquivalent:

$$\langle Z, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\Big\{ X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle \Big\} \tag{8}$$

$\forall Z$, also $\nabla_Y X$ eind. bestimmt durch r.S.

bestimmt durch Riemannsche Metrik.

(8) $\Rightarrow$: ∇ mit i.) & ii.) ist eindeutig bestimmt durch die Riemannsche Metrik.

__Existenz.__ Definiere ∇ mittels (8).

Rechne dann nach, dass ein affiner Zshg. mit i.) & ii.) entsteht.

Levi-Civita Zshg.

Darstellung bzgl. eines Koordinatensystems: $x: \mathbb{R}^n \supset U \to M$.

Die Christoffel Symbole des Zusammenhangs,

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k \qquad \text{(vgl. p.65)}$$

nennt man auch die Koeffizienten des Zusammenhangs ∇ auf U.

Aus (8) folgt für den Levi-Civita Zshg mit $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$

$$\sum_l \Gamma^l_{ij} g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\}, \quad i,j,k = 1 \dots n$$

$$X_i \langle X_j, X_k \rangle \qquad X_j \langle X_k, X_i \rangle \qquad X_k \langle X_i, X_j \rangle$$

$$\langle X_k, \underbrace{\nabla_{X_j} X_i}_{\sum_l \Gamma^l_{ij} X_l} \rangle$$

Weiter bezeichne (g^{km}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix.

Dann ist die klassische Darstellung der Christoffel-Symbole (zweiter Art: $\Gamma_{imj} := g_{mk} \Gamma^k_{ij}$) im Terme der Metrik.

$i,j,m = 1 \dots n$

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km} \qquad (8)$$

$$\underbrace{(\Gamma^1 \dots \Gamma^n)\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ & & \vdots \\ g_{n1} & & g_{nn} \end{pmatrix}}_{\sum_l \Gamma^l g_{lk}} \begin{pmatrix} g^{11} & \dots & g^{1n} \\ \vdots & & \\ g^{n1} & \dots & g^{nn} \end{pmatrix} \Bigg\} \sum_k \sum_l \Gamma^l g_{lk} g^{km}$$

zum $\mathbb{R}^n$

Bemerkungen. i.) Nach (8) & $g_{ij} = \delta_{ij}$ gilt

im Euklidischen Raum $\Gamma_{ij}^{k} = 0$.

ii.) An der Darstellung (2), p. 67, erkennt man, dass

$\frac{DV}{dt}$ sich von der gewöhnlichen Ableitung im Euklidischen Raum gerade durch die Terme mit den Christoffel Symbolen unterscheidet.

Somit ist im $\mathbb{R}^n$ die kovariante Ableitung gleich der üblichen Ableitung.

bzgl. Levi-Civita Zsh.

Spezialfall. vgl. Flächen im $\mathbb{R}^3$

Es sei $M = M^{(n)}$ eine diff'bare Mannigfaltigkeit, $\tilde{M} = \tilde{M}^{(n+k)}$ eine Riemannsche Mgfkt, $F: M \to \tilde{M}$ Immersion.

Induzierte Metrik auf M:

$$\langle u, v \rangle_p^M := \langle dF_p(u), dF_p(v) \rangle_{F(p)}^{\tilde{M}}.$$

Damit ist F isometrische Immersion.

Nun sei $p \in M$, $\mathcal{U} \subset M$ Umgebung von p in M, sodass $F(\mathcal{U}) \subset \tilde{M}$ eine Untermgfkt. von $\tilde{M}$. (Immersion lok. Einbettung)

Bez. weiter $\underline{X}, \underline{Y}$: diff'bare VFe auf $F(\mathcal{U})$ sowie

$\tilde{\underline{X}}, \tilde{\underline{Y}}$: Fortsetzungen auf eine offene Teilmenge von $\tilde{M}$.

Setze

$$\underline{\underline{\left(\nabla_{\underline{X}} \underline{Y}\right)(p) := \text{tangentielle Komponente von } \tilde{\nabla}_{\tilde{\underline{X}}} \tilde{\underline{Y}}\,(F(p))}}, \quad (*)$$

wobei $\tilde{\nabla}$ der Riemannsche Zshg. auf $\tilde{M}$ sei.

<u>Behauptung</u>. Durch (*) ist der Riemannsche Zshg. auf M gegeben.

<u>Beweis</u>. Evtl. Verkleinerung von $\mathcal{U}$: Funktion & VF. auf Übung: $F(\mathcal{U})$ können auf offene Umgebung fortgesetzt werden. (für F, Nachrech. $\underline{X} \to \tilde{\underline{X}}$ etc) $\Rightarrow$ Übg. 3.2

- <u>Affiner Zshg.</u>:

$$\left(\nabla_{f\underline{X}+g\underline{Y}} Z\right)(p) = \underline{P}_{T_{F(p)}F(\mathcal{U})} \left\{ \tilde{\nabla}_{\tilde{f}\tilde{\underline{X}}+\tilde{g}\tilde{\underline{Y}}} \tilde{Z} \right\}$$

$$= \underline{P}_{..} \left\{ \tilde{f}\, \tilde{\nabla}_{\tilde{\underline{X}}} \tilde{Z} + \tilde{g}\, \tilde{\nabla}_{\tilde{\underline{Y}}} \tilde{Z} \right\}$$

$$= f(p)\, \underline{P}\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\underline{X}}} \tilde{Z}\right) + g(p)\, \underline{P}\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\underline{Y}}} \tilde{Z}\right)$$

$$= f\, \nabla_{\underline{X}} Z + g\, \nabla_{\underline{Y}} Z\,,$$

ii), iii) analog.

• <u>Symmetrie:</u> $(\nabla_X Y)(p) - (\nabla_Y X)(p)$

$$= P(\tilde\nabla_{\tilde X} \tilde Y)(p) - P(\tilde\nabla_{\tilde Y} \tilde X)(p)$$

$$= P(\tilde\nabla_{\tilde X} \tilde Y - \tilde\nabla_{\tilde Y} \tilde X)(p)$$

$$= P([\tilde X, \tilde Y](p))$$

$$= P([X, Y](p)) = [X, Y](p).$$

• <u>Verträglichkeit:</u> $\langle \nabla_X Y(p), Z(p) \rangle + \langle Y(p), \nabla_X Z(p) \rangle$

$$= \langle P(\tilde\nabla_{\tilde X} \tilde Y(p)), \tilde Z(p) \rangle + \langle \tilde Y(p), P(\tilde\nabla_{\tilde X} \tilde Z(p)) \rangle$$

$$= \langle \tilde\nabla_{\tilde X} \tilde Y(p), \tilde Z(p) \rangle + \langle \tilde Y(p), \tilde\nabla_{\tilde X} \tilde Z(p) \rangle$$

$$= \{\tilde X \langle \tilde Y, \tilde Z \rangle\}(p) = \tilde X(p)(\langle \tilde Y, \tilde Z \rangle)$$

$$= X(p)(\langle \tilde Y, \tilde Z \rangle) = X(p)(\langle Y, Z \rangle)$$

$$= X \langle Y, Z \rangle (p).$$

$\boxtimes$