Kap. 4. Geodätische & konvexe Umgebungen

- Bisher: Grundlegendes Handwerkszeug, jetzt das erste fundamentale Konzept Riem. Geom.

Geodätische (Kurve ohne Beschleunigung bzgl. M)

- lokal als Trajektorie des geodätischen Flusses — Trajektorie auf TM
- exp : TM → M "sammelt" Geodätische zu eindeutigem diff'barem Obj.
- Längenminimierend (lokal)

Im $\mathbb{R}^3$: Geodätische: Beschleunigung c'' im $\mathbb{R}^3$ ist senkrecht (→ 1697 Johann Bernoulli,
auf Tangentialebene $f(x,y,z)=0$ Euler 1732,
Geodätische ⟺ Krümmung der Fläche: Gauß 1827)

§1 Der Geodätische Fluss

Generalvoraussetzung: M sei Riemannsche Mfkt mit Riemannschem Zshg.

<u>Definition 1.</u> Eine parametrisierte Kurve $\gamma : I \to M$ heißt <u>geodätisch in $t_0 \in I$</u>, falls

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)(t_0) = 0.$$

Beschleunigung in M verschwindet.

Ist γ geodätisch in jedem $t \in I$, so heißt γ <u>Geodätische</u>.

Ist $[a,b] \subset I$ und $\gamma : I \to M$ eine Geodätische, so heißt $\gamma|_{[a,b]}$ ein <u>geodätisches Segment</u>, das $\gamma(a)$ mit $\gamma(b)$ verbindet.

<u>Bezeichnung.</u> Manchmal nennt man auch die Spur $\gamma(I)$ Geodätische.

Sei nun $\gamma : I \to M$ Geodätische. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0 ,$$

Verträglichkeit mit Metrik

d.h. der Tangentenvektor hat konstante Länge.

<u>Im Folgenden stets:</u> $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| \equiv c \neq 0$, d.h. $\gamma \neq \text{const}$.

Die Bogenlänge – gemessen von $t = t_0$ – ist

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\gamma}{dt}(\tau) \right| d\tau = c \cdot (t - t_0):$$

Eine Geodätische ist stets proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

Im Fall $c = 1$ ist der Parameter t die Bogenlänge,

γ heißt normalisiert.

Betr. nun lokale Koordinaten $(\underline{x}, \mathcal{U})$ bei $\gamma(t_0) \in \underline{x}(\mathcal{U})$.

In $\mathcal{U}$ ist $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ Geodätische

genau dann, wenn

$$0 = \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \sum_k \left\{ \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

(2), Kap. 3.

Es ergibt sich ein nicht-lineares System von n gewöhnlichen

DGl. zweiter Ordnung in expliziter Form als

Gleichungen der Geodätischen:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0 \quad \text{für } k = 1 \ldots n. \qquad (1)$$

Betr. des System (1) auf dem Tangentialbündel TM

$$(q,v) \in TM \iff q \in M,\ v \in T_q M .$$

Ist $q \in \underline{x}(U)$, so ist $v = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und

(q,v) kann mit den Koordinaten $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ identifiziert werden: $T(\underline{x}(U)) \cong U \times \mathbb{R}^n = TU$,

das Tangentialbündel ist lokal ein Produkt. Vgl. Kap. 1.

Beachte weiter: Die kanonische Projektion

$$\pi : TM \to M, \quad \pi(q,v) = q$$

ist diff'bar.

Nun bestimmt jede Kurve (diff'bare) $t \mapsto \gamma(t)$ in M auch eine Kurve in TM: $t \mapsto \left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)\right)$,

bzgl. TU: $\quad t \mapsto \left(x_1(t), \dots, x_n(t), \frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t)\right)$.

Ist γ Geodätische, so folgt auf TU

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= y_k \\ \frac{dy_k}{dt} &= -\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}\, y_i y_j \end{aligned}\right\} \quad k = 1, \dots, n \qquad (1') \iff (1)$$

2n Gl. 1ter Ordnung

(Im Folgenden erinnere man sich an Theorem, p.37)

Lemma 1. Es gibt ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld G auf TM, dessen Trajektorien von der Form $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$ sind, wobei γ Geodätische auf M ist.

← V.F. auf TM, nicht auf M !

V.F. auf M: Zu Punkt gibt es Trajekt., hier: zu Pkt & Richtg „gibt es weiter" ↓ tangential an TM auch 2^k Mfk

Beweis. • Eindeutigkeit. Es sei $(p,v) \in TM$, (x, U) ein Koordinatensystem auf M & $p \in x(U)$.

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Geodätische $\tilde\gamma$ mit $\tilde\gamma(0) = p$, $\tilde\gamma'(0) = v$

(als Lösung von (1') mit Anfangsbedingung (p,v)).

G existiert nach Vor., dann ist die Trajektorie von G durch (p,v) ebenfalls gegeben durch eine Kurve $t \mapsto \underbrace{(\gamma(t), \gamma'(t))}_{\text{Kurve auf } TM}$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$.

γ Geodätische nach Def G.

Eindeutigkeit der Lösung des AWPs: $\tilde\gamma = \gamma$.

Da aber $G(p,v)$ Tangentenvektor an $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$, ist mit γ auch G eindeutig bestimmt.

- Existenz: Definiere G lokal über (1'), Eindeutigkeit impliziert, dass G wohl definiert ist. $\boxed{B}$

Definition 2. Das oben definierte Vektorfeld heißt geodätisches Feld auf TM, sein Fluss heißt geodätischer Fluss auf TM.

"kleine Geschwindigkeit"

Theorem H, p.37 auf G in $(p, 0) \in TM$

"Zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Menge $\mathcal{U} \subset TM$, wobei $(\underline{x}, \mathcal{U})$ ein Koordinatensystem bei p ist mit $(p,0) \in \mathcal{U}$, ein $\delta > 0$ und eine diff'bare Abbildung $\varphi: (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to TM$, sodass $t \mapsto \varphi(t, q, v)$ eine eindeutig bestimmte Trajektorie von G ist, die die Anfangsbed. $\varphi(0, q, v) = (q,v)$ für beliebige $(q,v) \in \mathcal{U}$ genügt."

Wähle die offene Menge $\mathcal{U}^{\theta}$ o.E. von der Form

(*) $\mathcal{U} = \{ (q,v) \in TU : q \in V,\ v \in T_q M \text{ mit } |v| < \varepsilon_1 \}$,

$V \subset U$ Umgebung von p, $\varepsilon_1 > 0$.

Ist $\pi : TM \to M$ die kanonische Projektion,

$\gamma = \pi \circ \varphi$, so bedeutet das

Satz 1. Zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $p \in V \subset M$, Zahlen $\delta, \varepsilon_1 > 0$ und eine Abb.

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M$$

oben Trajektorie in TM, jetzt: γ Geod. auf M.

mit $\mathcal{U}^{\theta} = \{ (q,v),\ q \in V,\ v \in T_q M,\ |v| < \varepsilon_1 \}$,

sodass die Kurve $t \mapsto \gamma(t,q,v)$, $t \in (-\delta,\delta)$, die eindeutig bestimmte Geodätische in M ist mit

$$\gamma(0,q,v) = q, \quad \gamma'(0,q,v) = v.$$

← $|v|$ nicht beliebig groß $\Leftrightarrow$ keine globale Exist.

in jedem Pkt in jede Richtung $\exists$ lokal Geod.

Definitionsintervall verkleinern $\longleftrightarrow$ Geschwindigkeit vergrößern

Lemma 2. (Homogenitätslemma)

Die Geodätische $\gamma(t,q,v)$ sei definiert auf $(-\delta,\delta)$ und es sei $\lambda > 0$.

Anfangsgeschw. λv

Dann ist die Geodätische $\gamma(t,q,\lambda v)$ definiert auf $(-\delta/\lambda, \delta/\lambda)$ und es gilt

$$\gamma(t,q,\lambda v) = \gamma(\lambda t, q, v).$$

Beweis. Betr. die Kurve $h : (-\delta/\lambda, \delta/\lambda) \to M$,

$h(t) = \gamma(\lambda t, q, v)$. Es ist $h(0) = \gamma(0,q,v) = q$,

aus $h'(t) = \lambda\,\gamma'(\lambda t, q, v)$ folgt $\lambda'(0) = \lambda v$ sowie

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{dh}{dt}\right) = \nabla_{h'(t)} h'(t) = \lambda^2 \nabla_{\gamma'(\underbrace{\lambda t}_{\tilde t}, q, v)} \gamma'(\underbrace{\lambda t}_{\tilde t}, q, v) \equiv 0$$

$\Rightarrow$ h ist Geodätische durch q, Geschwindigkeit λv zur Zeit $t=0$.

Eindeutigkeit: $h(t) = \gamma(t,q,\lambda v)$.

$$\| \quad \gamma(\lambda t, q, v)$$

$\square$

$\rightsquigarrow$ Variante von Satz 1:

<u>Satz 2.</u> Zu jedem $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $p \in V \subset M$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Abbildung

$$\gamma : (-2,2) \times \mathcal{U} \to M,$$

$$\mathcal{U} = \{ (q,w) : q \in V,\ w \in T_q M,\ |w| < \varepsilon \},$$

sodass die Kurve $t \mapsto \gamma(t,q,w)$, $t \in (-2,2)$, die eindeutig bestimmte Geodätische in M ist mit

$$\gamma(0,q,w) = q, \quad \gamma'(0,q,w) = w.$$

<u>Bem.</u> Analog natürlich: Zeitintervall klein, Geschwindigkeit groß.

Damit: <u>Exponentialabbildung</u>.

Es sei $p \in M$, $\mathcal{U} \subset TM$ nach Satz 2.

Dann ist die <u>Exponentialabbildung</u> $\exp : \mathcal{U} \to M$ definiert durch

Zeit "1"; Parametr.: $|v|$ = Länge; Bed. 1

$$\exp(q,v) = \gamma(1,q,v) \quad \left(= \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right)\right)$$

$|v| \neq 0$.

für $(q,v) \in \mathcal{U}$.

laufe von q einen Zeitschritt ~~mit~~ in Richtung v auf Geod.

Nach Def. ist <u>exp. diff'bar</u> ($\leadsto$ Fluss)

Länge: $|v|$ in Richtung v auf Geodätischen

Oft wird exp auch auf offene Teilmengen von

$T_q M$ eingeschränkt
hier fest Pkt.

$$\exp_q : T_q M \supset B_\varepsilon(0) \to M,$$

$$\exp_q(v) = \exp(q, v) \;, \quad B_\varepsilon(0) : \text{offene Kugel in } T_q M.$$

Auch $\exp_q$ ist diff'bar & es gilt $\exp_q(0) = q$
(konstante Geodätische)

<u>Satz 3.</u> Zu jedem $q \in M$ gibt es $\varepsilon = \varepsilon(q) > 0$,

sodass $\exp_q : B_\varepsilon(0) \to M$ ein Diffeomorphismus

von $B_\varepsilon(0)$ auf eine offene Umgebung von q in M ist.

<u>Beweis.</u> (Satz über die inverse Funktion)

Berechne $d(\exp_q)_0 : T_0(T_q M) \to T_{\exp_q(0)} M$
$\cong T_q M$

$$d(\exp_q)_0 (v) = \frac{d}{dt}(\exp_q(tv))\Big|_{t=0} =$$

$\alpha(t) = tv$
$\alpha' = v$

$$= \frac{d}{dt}\left(\gamma(1, q, tv)\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\gamma(t, q, v)\right)_{t=0}$$

$$= v.$$

Also ist $d(\exp_q)_0(v)$ die Identität auf $T_q M$, insbesondere regulär. Satz über inverse Fkt $\Rightarrow$ Beh. $\square$

<u>Bsp.</u> i.) $M = \mathbb{R}^n$. Hier ist die kovariante Ableitung die gewöhnliche Ableitung, die Geodätischen sind proportional zur Bogenlänge parametrisierte Geraden.
Die Exponentialabbildung ist die Identität des $\mathbb{R}^n$ ($T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, + Translation)

ii.) $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$: n-dim Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$

Die nach Bogenlänge parametrisierten Großkreise sind in diesem Fall (geschlossene) Geodätische, <u>denn</u>:
Zeige: Das Geschwindigkeitsfeld solcher Großkreise ist parallel.

Bsp pp. 78: Kovariante Ableitung: Differenziere wie üblich & projiziere auf Tangentialraum.
Betrachte dazu o.B.d.A. einen Großkreis in der (x_1, x_2) - Ebene des $\mathbb{R}^{n+1}$.