Kap. 2, Aufg. 3

(1)

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad g(t) = yt + x$, $\quad t, x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$

i.) Bel. G Gruppe bzgl. Komposition.

Bew. $g_1 = y_1 t + x_1$, $\quad g_2 = y_2 t + x_2$

$$g_1 \circ g_2 (t) = y_1 (y_2 t + x_2) + x_1$$

$$= \underbrace{y_1 y_2}_{>0} t + (y_1 x_2 + x_1) \quad \in G$$

Assoziativ?

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = y_1 y_2 (y_3 t + x_3) + y_1 x_2 + x_1$$

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = y_1 (y_2 y_3 t + (y_2 x_3 + x_2)) + x_1$$

$$= y_1 y_2 (y_3 t + x_3) + y_1 x_2 + x_1 \quad ✓$$

neutrales Element: $\quad e = 1t + 0 \quad ✓$

inverses Element: $\quad g = yt + x$

$$g^{-1} = \frac{1}{y} t - \frac{x}{y}$$

$$g \circ g^{-1} = y \left(\frac{1}{y} t - \frac{x}{y} \right) + x = t$$

$$g^{-1} \circ g = \frac{1}{y} (yt + x) - \frac{x}{y} = t \quad ✓$$

$\Rightarrow$ G ist Gruppe bzgl. der Komposition.

Als differenzierbare Mgfkt hat

$$G = \{ (x,y) \in \mathbb{R} , \ y > 0 \}$$

die Struktur des $\mathbb{R}^2$ (die obere Halbebene).

Die Komposition ist beschrieben durch

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (y_1 x_2 + x_1, \ y_1 y_2).$$

Es ~~ist~~ ist $(x_1, y_1)^{-1} = \left(-\frac{x_1}{y_1} , \frac{1}{y_1} \right)$

Für die Eigenschaft Lie-Gruppe ist zu zeigen

Die Abbildung

$$\underbrace{((x_1, y_1), (x_2, y_2))}_{\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \longrightarrow (x_1, y_1)(x_2, y_2)^{-1}$$

$$= (x_1, y_1) \left(-\frac{x_2}{y_2} , \frac{1}{y_2} \right)$$

$$= \underbrace{\left(-y_1 \frac{x_2}{y_2} + x_1 , \ \frac{y_1}{y_2} \right)}_{\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+}$$

ist diff'bar.

Fazit: Die eigentlichen affinen Funktionen bilden im obigen Sinne eine Lie-Gruppe.

ii) ges.: Links-invariante Metrik von G,

die für das neutrale Element $e = (0,1)$

mit der Euklidischen Metrik übereinstimmt

$(g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = 0)$

nicht zu verwechseln mit Metrik

Ist $g = (x,y)$, so ist $g^{-1} = \left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$ (s.o.)

& $L_{g^{-1}}(f) = g^{-1} f \underset{f=(\tilde{x},\tilde{y})}{=} \left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) \cdot (\tilde{x},\tilde{y})$

$$= \left(\frac{\tilde{x}}{y} - \frac{x}{y}, \frac{\tilde{y}}{y}\right)$$

$$= \left(\frac{\tilde{x}-x}{y}, \frac{\tilde{y}}{y}\right)$$

Definition links-invariante Metrik:

$$\langle u,v\rangle_{(x,y)} := \left\langle \left(dL_{(x,y)^{-1}}\right)_{(x,y)}(u), \left(dL_{(x,y)^{-1}}\right)_{(x,y)}(v)\right\rangle_{e=(1,0)}$$

$$(x,y) \in G, \quad u,v \in T_{(x,y)}G.$$

Man identifiziert: $T_{(x,y)}G$ mit $T_{(x,y)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$,

d.h. mit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+} = \mathbb{R}^2$

Damit ist $\underset{\substack{(x,y)\text{ fix} \\ \text{Abl. nach } \tilde{x},\tilde{y}}}{DL_{g^{-1}} = dL_{g^{-1}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$

Dl für $u, v \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\langle dL_{g^{-1}}(u), dL_{g^{-1}}(v) \rangle_e = \langle \frac{1}{y} u, \frac{1}{y} v \rangle_e$$

$g = (x,y)$

$$= \frac{1}{y^2} \langle u, v \rangle_e$$ hier ist das Skalarprod. vorgegeben

$$\underset{\text{n. Vor.}}{=} \frac{1}{y^2} \langle u, v \rangle$$ Eukl. Skalarprod.

$u = e_i$, $v = e_j$ (Standardbasis des $\mathbb{R}^2$)

$$\Rightarrow g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{12} = 0.$$

iii.) Notation: $(x,y) = z = x + iy$.

$$z \to z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc = 1$$

(Möbiustransformation)

Isometrie?

- $z \in G \overset{?}{\Rightarrow} z' \in G$

Es ist $z' = x' + iy'$ &

$$y' = \frac{1}{2i}(z' - \bar{z}') = \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d) - (a\bar{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2i\,|cz+d|^2}\left(\cancel{ac z\bar{z}} + adz + bc\bar{z} + \cancel{bd} - \cancel{a\bar{z}cz} - bcz - a\bar{z}d - \cancel{bd}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{1}{|cz+d|^2}\left\{\underbrace{(ad-bc)}_{=1}(z-\bar{z})\right\}$$

D.h. $\quad y' = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} > 0 \quad \checkmark$

- oder argumentiere mit Möbiustransformation, $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, biholomorphe Abbildung, Gerade werden auf Gerade abgebildet, insbesondere $[\operatorname{Im} z = 0] \xrightarrow{f} [\operatorname{Im} z' = 0]$

$\rightsquigarrow$ Abbildung ist Diffeomorphismus

- Isometrie? $\qquad$ Beh. z.B. $\langle e_2, e_2 \rangle_{(x,y)} = \dfrac{1}{y^2}$

(Hinweis oder hier: direkt Rech.) $\qquad$ (andere Kombination analog)

Mit $f = u + iv$ ist (s.o.)

$$v(x,y) = \frac{y}{|cz+d|^2}$$

$$|cz+d|^2 = \left| \begin{pmatrix} cx+d \\ cy \end{pmatrix} \right|^2 = \underbrace{(cx+d)^2}_{=:\alpha^2} + cy^2 = \alpha^2 + y^2c^2$$

d.h.

$$v_y = \frac{1}{\alpha^2+y^2} - \frac{y \cdot 2yc^2}{(\alpha^2+y^2c^2)^2}$$

$$= \frac{\alpha^2+y^2c^2-2y^2c^2}{(\alpha^2+y^2)^2} = \frac{\alpha^2-y^2c^2}{(\alpha^2+y^2)^2}$$

Weiter gilt $\quad u_y = -v_x \quad$ (f holomorph), d.h. $u_y = + \dfrac{y \cdot 2(cx+d)c}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2}$

$$= \frac{y\, 2dc}{(d^2+c^2y^2)^2}$$

$df(e_2) = \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix}$, d.h.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eukl. Skalarprod.}}}{df(e_2) \cdot df(e_2)} = u_y^2 + v_y^2$$

$$= \frac{4d^2c^2y^2 + (d^2 - y^2c^2)^2}{(d^2+c^2y^2)^4}$$

$$= \frac{4d^2c^2y^2 + d^4 - 2d^2c^2y^2 + c^4y^4}{(d^2+c^2y^2)^4}$$

$$= \frac{(d^2+c^2y^2)^2}{(d^2+c^2y^2)^4}$$

$$= \frac{1}{(d^2+c^2y^2)^2} = \frac{1}{|cz+d|^4}$$

$\dfrac{1}{v^2} = \dfrac{|cz+d|^4}{y^2}$, d.h.

$$\underline{\underline{\langle df(e_2), df(e_2)\rangle_{f(x,y)=u+iv}}} = \frac{1}{|cz+d|^4} \frac{|cz+d|^4}{y^2}$$

$$= \frac{1}{y^2} = \underline{\underline{\langle e_2, e_2\rangle_{(x,y)}}}$$

Kap 3. Aufg. 3.

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \qquad g_{12} = 0$$

i.) Christoffel-Symbole (Riemannscher Zshg)

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}, \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x \leftrightarrow x_1 \\ y \leftrightarrow x_2 \end{matrix}$$

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{y^2} \delta_{jk} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{y^2} \delta_{ki} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{y^2} \delta_{ij} \right) \right\} \cdot y^2 \delta_{km}$$

$$\underset{k=m}{=} \frac{1}{2} y^2 \left\{ \delta_{jm} \delta_{i2} \left(-\frac{2}{y^3} \right) + \delta_{mi} \delta_{j2} \left(-\frac{2}{y^3} \right) - \delta_{ij} \delta_{m2} \left(-\frac{2}{y^3} \right) \right\}$$

$$= -\frac{1}{y} \left\{ \delta_{jm} \delta_{i2} + \delta_{mi} \delta_{j2} - \delta_{ij} \delta_{m2} \right\}. \qquad (*)$$

$$(*) \Rightarrow \quad \Gamma^1_{11} = \left(-\frac{1}{y}\right) \cdot 0 = 0$$

$$\Gamma^2_{12} = \left(-\frac{1}{y}\right) \cdot 0 = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = \left(-\frac{1}{y}\right) \cdot 0 = 0$$

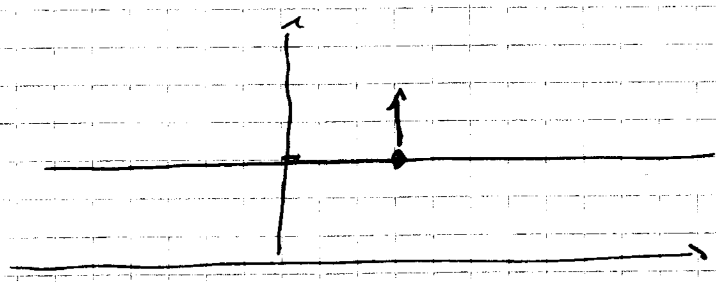
$$\Gamma^2_{11} = \left(-\frac{1}{y}\right) \cdot (-1) = \frac{1}{y}$$

$$\Gamma^1_{12} = \left(-\frac{1}{y}\right) \cdot (1) = -\frac{1}{y}$$

$$\Gamma^2_{22} = \left(-\frac{1}{y}\right) \cdot (1) = -\frac{1}{y}$$

ii.) $v_0 = (0,1)$ Tangentenvektor in $(0,1)$.

Bst. Paralleltransport längs $x = t,\ y = 1$



Parallelität

$$0 = \frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij} v^j \frac{dx_i}{dt} \qquad (2,\ \text{Kap. } 3)$$

$v^1 = a(t)$, $v^2 = b(t)$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{da}{dt} + \Gamma^1_{12}\, b \frac{dx_1}{dt} = \frac{da}{dt} - \frac{1}{y} b(t)$$

$$y = 1: \quad \frac{da}{dt} = b(t)$$

B

$$0 = \frac{db}{dt} + \Gamma^2_{11}\, a \underbrace{\frac{dx_1}{dt}}_{\cancel{=b}} + \Gamma^2_{22}\, b \underbrace{\frac{dx_2}{dt}}_{=0}$$

$$= \frac{db}{dt} + \frac{1}{y}\, a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{db}{dt} = -a(t)$$

$$\rightarrow \quad v(t) = (\sin t, \cos t)$$