Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Blockveranstaltung zur Einführung in die Riemannsche Geometrie
Saarbrücken, März 2013

Begleitende Übungen zu Kapitel 1.
Keine Abgabe, keine Korrektur

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Struktur auf einer Menge M eine Topologie auf M induziert.

Aufgabe 2. (Produktmannigfaltigkeit) Es seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit differenzierbaren Strukturen $\{(\underline{\mathbf{x}}_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ und $\{(\underline{\mathbf{y}}_\beta, V_\beta)\}_\beta$ auf M respektive N.

i) Zeigen Sie, dass $\{(\underline{\mathbf{z}}_{\alpha\beta}, U_\alpha \times V_\beta)\}$ mit $\underline{\mathbf{z}}_{\alpha\beta}(p,q) = (\underline{\mathbf{x}}_\alpha(p), \underline{\mathbf{y}}_\beta(q))$ für $p \in U_\alpha$ und $q \in V_\beta$ eine differenzierbare Struktur auf $M \times N$ liefert.

ii) Zeigen Sie, dass die Projektionen

$$\pi_1 : \quad M \times N \to M$$

und

$$\pi_2 : \quad M \times N \to N$$

differenzierbare Abbildungen sind.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die folgenden beiden differenzierbaren Strukturen auf der reellen Achse $\mathbb{R}$: $(\underline{\mathbf{x}}_1, \mathbb{R})$, wobei $\underline{\mathbf{x}}_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch $\underline{\mathbf{x}}_1(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und wobei $\underline{\mathbf{x}}_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch $\underline{\mathbf{x}}_2(x) = x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

i) Die Identitätsabbildung $i \colon (\underline{\mathbf{x}}_1, \mathbb{R}) \to (\underline{\mathbf{x}}_2, \mathbb{R})$ ist kein Diffeomorphismus. Deshalb sind die maximalen Strukturen, die durch $(\underline{\mathbf{x}}_1, \mathbb{R})$ und $(\underline{\mathbf{x}}_2, \mathbb{R})$ bestimmt werden, unterschiedlich.

ii) Die Abbildung $f\colon (\underline{\mathbf{x}}_1, \mathbb{R}) \to (\underline{\mathbf{x}}_2, \mathbb{R})$, $f(x) = x^3$, ist ein Diffeomorphismus. Obwohl die differenzierbaren Strukturen $(\underline{\mathbf{x}}_1, \mathbb{R})$, $(\underline{\mathbf{x}}_2, \mathbb{R})$ verschieden sind, bestimmen sie also diffeomorphe differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Aufgabe 4. Beweisen Sie: Ist $M \neq \emptyset$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $k \leq n$, so gibt es eine Einbettung $\mathbb{R}^k \to M$.

Aufgabe 5. Es sei N eine kompakte, M eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\dim M = \dim N$, und $f\colon N \to M$ eine Einbettung. Zeigen Sie, dass f ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 6. Zeigen Sie: Ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M orientierbar und zusammenhängend, so gibt es genau zwei verschiedene Orientierungen auf M.

Aufgabe 7. Zeigen Sie: Sind M_1 und M_2 differenzierbare Mannigfaltigkeiten und ist $\varphi\colon M_1 \to M_2$ eine Diffeomorphismus, so folgt

$$M_1 \text{ ist orientierbar} \quad \Leftrightarrow \quad M_2 \text{ ist orientierbar}\,.$$

Aufgabe 8. Kann eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M durch zwei Koordinatenumgebungen V_1 und V_2 überdeckt werden, sodass $V_1 \cap V_2$ zusammenhängend ist, so ist M orientierbar.

Aufgabe 9. Berechnen Sie $[X, Y]$ bezüglich zweier Parametrisierungen $\underline{\mathbf{x}}\colon U \to M$ und $\underline{\mathbf{y}}\colon V \to M$. Zeigen Sie, dass die Definition der Vorlesung konsistent ist.

Aufgabe 10. Prüfen Sie nach, dass das Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ein Liesches Klammerprodukt ist.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/Riemann/riemann.html