Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Blockveranstaltung zur Einführung in die Riemannsche Geometrie
Saarbrücken, März 2013

Begleitende Übungen zu Kapitel 2.
Keine Abgabe, keine Korrektur

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Antipoden-Abbildung $A\colon S^n \to S^n$, $A(p) = -p$, eine Isometrie auf S^n ist.

Benutzen Sie diese Tatsache, um eine Riemannsche Metrik auf dem reellen projektiven Raum $P^n(\mathbb{R})$ einzuführen, sodass die natürliche Projektion $\pi\colon S^n \to P^n(\mathbb{R})$ eine lokale Isometrie ist.

Aufgabe 2. Finden Sie eine isometrische Immersion des flachen Torus T^n in $\mathbb{R}^{2n}$.

Aufgabe 3. Eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = yt + x$, $t,\ x,\ y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, heißt eine eigentliche affine Funktion. Zeigen Sie:

i) Die Teilmenge aller solcher Funktionen bildet eine Lie-Gruppe G bzgl. der üblichen Komposition.

Als differenzierbare Mannigfaltigkeit ist G einfach die obere Halbebene $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > 0\}$ mit der differenzierbaren Struktur, die vom $\mathbb{R}^2$ induziert wird.

ii) Die links-invariante Riemannsche Metrik von G, die für das neutrale Element $e = (0,1)$ mit der Euklidischen Metrik ($g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$) übereinstimmt, ist gegeben durch $g_{11} = g_{22} = 1/y^2$, $g_{12} = 0$.

(Dies ist die Metrik der nicht-Euklidischen Geometrie von Lobatchevski.)

iii) Mit $(x,y) = z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, ist die Transformation

$$z \mapsto z' = \frac{az+b}{cz+d}\,, \qquad a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ \ ad - bc = 1\,,$$

eine Isometrie von G.

Bitte wenden.

Hinweis. Beachten Sie, dass die erste Fundamentalform wie folgt geschrieben werden kann:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = -\frac{4dzd\overline{z}}{(z - \overline{z})^2} \ .$$

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/Riemann/riemann.html