Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Blockveranstaltung zur Einführung in die Riemannsche Geometrie
Saarbrücken, März 2013

Begleitende Übungen zu Kapitel 3.
Keine Abgabe, keine Korrektur

Aufgabe 1. Prüfen Sie nach, dass durch die in der Vorlesung gegebene Formel (2) aus Kapitel 3, d.h.

$$\frac{DV}{dt} := \sum_k \left[\frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} \frac{dx^i}{dt} v^j \Gamma^k_{ij} \right] X_k \ ,$$

tatsächlich eine kovariante Ableitung definiert wird.

Mit anderen Worten: Rechnen Sie nach, dass die Eigenschaften i.), ii.), iii.) aus Satz 1, Kapitel 3, erfüllt sind.

Aufgabe 2. Es sei $M = M^{(2)} \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit der induzierten Riemannschen Metrik. Sei weiter $c\colon I \to M$ eine differenzierbare Kurve auf M und es sei V ein zu M tangentiales Vektorfeld längs c. V kann man sich als eine glatte Funktion $V\colon I \to \mathbb{R}^3$ mit $V(t) \in T_{c(t)}M$ vorstellen.

i) Zeigen Sie, dass V genau dann parallel ist, wenn dV/dt senkrecht zu $T_{c(t)}M \subset \mathbb{R}^3$ ist, wobei dV/dt die gewöhnliche Ableitung von $V\colon I \to \mathbb{R}^3$ bezeichnet.

ii) Ist $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre des $\mathbb{R}^3$, so zeigen Sie, dass das Geschwindigkeitsfeld längs Großkreisen, die nach Bogenlänge parametrisiert sind, ein paralleles Feld ist.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die obere Halbebene

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0\}$$

mit der durch $g_{11} = g_{22} = 1/y^2$, $g_{12} = 0$ gegebenen Metrik.

Bitte wenden.

i) Zeigen Sie für die Christoffel Symbole des Riemannschen Zusammenhangs:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0 \ , \qquad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{y} \ , \qquad \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y} \ .$$

ii) Sei $v_0 = (0,1)$ ein Tangentenvektor im Punkt $(0,1)$ von $\mathbb{R}^2_+$ (v_0 ist ein Einheitsvektor auf der y-Achse mit Ursprung in $(0,1)$).

Sei $v(t)$ der Paralleltransport von v_0 längs der Kurve $x = t$, $y = 1$. Zeigen Sie, dass $v(t)$ einen Winkel t mit der Richtung der y-Achse einschließt, wobei im Uhrzeigersinn gemessen wird.

Hinweis. Das Feld $v(t) = (a(t), b(t))$ erfüllt das System (3) aus der Vorlesung, das ein paralleles Vektorfeld definiert und das sich hier zu

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} + \Gamma^1_{12} b = 0 \ , \\ \frac{db}{dt} + \Gamma^2_{11} a = 0 \end{aligned}\right\}$$

vereinfacht. Mit $a = \cos\theta(t)$, $b = \sin\theta(t)$ und da längs der gegebenen Kurve $y = 1$ gilt, folgt $d\theta/dt = -1$. Aus $v(0) = v_0$ folgt $\theta(t) = \pi/2 - t$.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/Riemann/riemann.html