Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Blockveranstaltung zur Einführung in die Riemannsche Geometrie
Saarbrücken, März 2013

Begleitende Übungen zu Kapitel 4.
Keine Abgabe, keine Korrektur

Aufgabe 1. Geodätische auf einer Rotationsfläche.

i) Es seien (u, v) die kartesischen Koordinaten des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)) \,, \\ U &= \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \; u_0 < u < u_1, \; v_0 < v < v_1\right\} \,, \end{aligned}$$

eine Immersion ist, falls f und g differenzierbare Funktionen mit $f'(v)^2 + g'(v)^2 \neq 0$ und $f(v) \neq 0$ (für alle $v_0 < v < v_1$) sind.

Das Bild $\varphi(U)$ ist die Fläche, die durch Rotation der Kurve $(f(v), g(v))$ um die z-Achse erzeugt wird, und heißt eine Rotationsfläche S.

Die Bilder der Kurven $u = const.$ und $v = const.$ heißen die Meridiane respektive die Breitenkreise von S.

ii) Zeigen Sie, dass die induzierte Metrik in den Koordinaten (u, v) durch

$$g_{11} = f^2 \,, \qquad g_{12} = 0 \,, \qquad g_{22} = (f')^2 + (g')^2$$

gegeben ist.

iii) Leiten Sie die lokalen Gleichungen einer Geodätischen her:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2ff'}{f^2}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} &= 0 \,, \\ \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}\left[\frac{du}{dt}\right]^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}\left[\frac{dv}{dt}\right]^2 &= 0 \,. \end{aligned}$$

iv) Folgern Sie die geometrische Interpretation der obigen Gleichungen:

Die zweite Gleichung ist – außer für Meridiane und Breitenkreise – äquivalent zu der Tatsache, dass die "Energie" $|\gamma'(t)|^2$ einer Geodätischen konstant längs γ ist.

Die erste Gleichung zeigt, dass, falls $\beta(t)$, $\beta(t) < \pi$, der orientierte Winkel ist, in dem γ einen Breitenkreis P im Punkt $\gamma(t)$ schneidet, die Gleichung

$$r \cos\beta = const.$$

gilt (Clairautsche Relation). Dabei ist r der Radius des Breitenkreises P.

v) Zeigen Sie mithilfe der Clairautschen Relation, dass eine Geodätische des Paraboloids,

$$f(v) = v\ , \quad g(v) = v^2\ , \quad 0 < v < \infty\ , \quad -\varepsilon < u < 2\pi + \varepsilon\ ,$$

die kein Meridian ist, unendlich viele Selbstüberschneidungen hat.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Unter *Isometrien* werden Geodätische auf Geodätische abgebildet.

Aufgabe 3. Es sei G eine Lie Gruppe, $\mathcal{G}$ deren Lie Algebra und $X \in \mathcal{G}$ (vgl. Kapitel 2).

Die Trajektorien von X bestimmen eine Abbildung φ: $(-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ mit $\varphi(0) = e$, $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$.

i) Zeigen Sie, dass $\varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist und dass $\varphi(t+s) = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$ gilt. (φ: $\mathbb{R} \to G$ heißt dann eine ein-Parameter Untergruppe von G.)

Hinweis. Sei $\varphi(t_0) = y$, $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Zeigen Sie aufgrund der Linksinvarianz, dass $t \mapsto y^{-1}\varphi(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, ebenfalls eine Integralkurve von X ist, die für $t = t_0$ durch e verläuft. Wegen der Eindeutigkeit gilt $\varphi(t_0)^{-1}\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$, φ kann also von t_0 in ein Intervall vom Radius ε fortgesetzt werden, woraus die erste Behauptung folgt. Beim Beweis der zweiten Behauptung ist $\varphi(t_0)^{-1} = \varphi(-t_0)$ zu beachten.

ii) Zeigen Sie: Hat G eine bi-invariante Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann bilden die Geodätischen von G, die in e starten, eine ein-Parameter Untergruppe von G.

Hinweis. Beachten Sie die Gleichung (8) aus Kapitel 3 und die links-Invarianz der Metrik, um $\langle X, \nabla_Y Y \rangle = \langle Y, [X, Y] \rangle$ für links-invariante Vektorfelder X, Y, Z zu beweisen. Aufgrund der bi-Invarianz gilt weiter

$$\langle [U, X], V \rangle = -\langle U, [V, X] \rangle\ , \quad X,\ U,\ V \in \mathcal{G}\ .$$

Es folgt $\nabla_Y Y = 0$ für alle $Y \in \mathcal{G}$, also sind ein-Parameter Untergruppen Geodätische. Die Behauptung folgt aus der Eindeutigkeit.

Aufgabe 4. Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $X \in \mathbf{X}(M)$. Es sei $p \in M$ und $U \subset M$ eine Umgebung von p.

Bitte wenden.

Weiter sei $\varphi\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times U \to M$ eine differenzierbare Abbildung, sodass für alle $q\in U$ die Kurve $t\mapsto \varphi(t,q)$ eine Trajektorie von X durch q bei $t=0$ ist.

X heißt ein *Killing Feld* (oder infinitesimale Isometrie), falls die Abbildung $\varphi(t_0,\cdot)\colon U\subset M\to M$ für alle $t_0\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ eine Isometrie ist.

Beweisen Sie:

i) Ein Vektorfeld v auf dem $\mathbb{R}^n$ kann als Abbildung $v\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ angesehen werden. Das Feld ist linear, wenn v eine lineare Abbildung ist.

Ein lineares Feld auf dem $\mathbb{R}^n$, gegeben durch eine Matrix A, ist genau dann ein Killing Feld, wenn A antisymmetrisch ist.

ii) Sei X ein Killing Feld auf M, $p\in M$ und U eine normale Umgebung von p auf M. Weiter sei p ein eindeutiger Punkt in U mit $X(p)=0$.

Dann ist X in U tangential zu den geodätischen Sphären um p.

iii) Sei X ein differenzierbares Vektorfeld auf M und sei $f\colon M\to N$ eine Isometrie. Sei Y ein Vektorfeld auf N, das durch $Y(f(p))=df_p(X(p))$, $p\in M$, gegeben ist.

Dann ist Y genau dann ein Killing Feld, wenn X ein Killing Feld ist.

iv) X ist ein Killing Feld $\Leftrightarrow \langle\nabla_Y X,Z\rangle+\langle\nabla_Z X,Y\rangle=0$ für alle Y, $Z\in\mathbf{X(M)}$.

Diese Gleichung heißt *Killing Gleichung*.

Hinweis zu "$\Rightarrow$". Wegen der Stetigkeit genügt es, die Gleichung für $X(q)\neq 0$ zu zeigen. Dann sei $S\subset U$ eine Untermannigfaltigkeit von U, die durch q verläuft, normal zu $X(q)\neq 0$ bei q ist und mit $\dim S=\dim M-1$.

Seien $(x_1,\dots,x_{n-1})$ die Koordinaten in einer Umgebung $V\subset S$ von q, sodass $(x_1,\dots,x_{n-1},t)$ die Koordinaten in einer Umgebung $V\times(-\varepsilon,\varepsilon)\subset U$ sind und sodass $X=\partial/\partial t$.

Mit $X_i=\partial/\partial x_i$ folgt

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{X_j}X,X_i\rangle+\langle\nabla_{X_i}X,X_j\rangle &= X\langle X_i,X_j\rangle-\langle[X,X_i],X_j\rangle-\langle[X,X_j],X_i\rangle\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\langle X_i,X_j\rangle=0\ ,\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung benutzt wurde, dass X ein Killing Feld ist.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/Riemann/riemann.html