

1. Klausur - 06.08.2019  
Klausuraufgaben zur Vorlesung  
*Höhere Mathematik für Ingenieure IV B*

Notationen:

- $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $f = u + iv$  mit reellwertigen Funktionen  $u$  und  $v$ .
- Für  $0 < r \in \mathbb{R}$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$  sei

$$\kappa_r(z_0): [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + re^{it}.$$

- Für  $0 \leq r_1 < r_2$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$  sei

$$A_{r_1, r_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} ; r_1 < |z - z_0| < r_2\}.$$

**Aufgabe 1**

**(4+(2+2+2)=10 Punkte)**

- (i) Bestimmen sie alle Punkte aus  $\mathbb{C}$  in denen

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2 \operatorname{Im}(z)$$

komplex differenzierbar ist und geben Sie dort die Ableitung an.

- (ii) Charakterisieren Sie jeweils alle Singularitäten von

(a)  $f(z) = \frac{5z^2+3z}{z^2+2z},$

(b)  $f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z^2},$

(c)  $f(z) = \exp(z^8 + 4z).$

**Aufgabe 2**

**((2+2+2)+1+3=10 Punkte)**

Sei

$$f(z) = \frac{-2}{z^2 - 6z + 8}.$$

- (i) Berechnen Sie die Laurentreihenentwicklung von  $f$  auf

(a)  $A_{0,2}(0),$

(b)  $A_{2,4}(0),$

(c)  $A_{4,\infty}(0).$

- (ii) Berechnen Sie das Residuum von  $f$  in allen Singularitäten.

- (iii) Berechnen Sie für alle positiven reellen Zahlen  $r$  mit  $r \neq 2$  und  $r \neq 4$

$$\int_{\kappa_r(0)} f(z) dz.$$

**Aufgabe 3**

**(4+6=10 Punkte)**

- (i) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{\kappa_2(-1)} \frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2(z-3)} dz.$$

- (ii) Sei  $k \in \mathbb{Z}$ . Berechnen Sie (in Abhängigkeit von  $k$ ) das Residuum an der Stelle 0 von

$$f_k: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{\exp(1/z)}{z^k}.$$