1. Klausur - 06.08.2019
Klausuraufgaben zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IV B

Notationen:

- $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *mit* $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $f = u + iv$ *mit reellwertigen Funktionen* u *und* v.
- *Für* $0 < r \in \mathbb{R}$ *und* $z_0 \in \mathbb{C}$ *sei*
$$\kappa_r(z_0)\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{C},\ t \mapsto z_0 + re^{it}.$$
- *Für* $0 \leq r_1 < r_2$ *und* $z_0 \in \mathbb{C}$ *sei*
$$A_{r_1,r_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ r_1 < |z - z_0| < r_2\}\,.$$

Aufgabe 1 **(4+(2+2+2)=10 Punkte)**

(i) Bestimmen sie alle Punkte aus $\mathbb{C}$ in denen

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2\,\mathrm{Im}(z)$$

komplex differenzierbar ist und geben Sie dort die Ableitung an.

(ii) Charakterisieren Sie jeweils alle Singularitäten von

(a) $f(z) = \frac{5z^2+3z}{z^2+2z}$,
(b) $f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z^2}$,
(c) $f(z) = \exp(z^8 + 4z)$.

Lösung. (i) Da für $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$f(z) = z^2\,\mathrm{Im}(z) = (x + iy)^2 y = (x^2 + 2ixy - y^2)y = x^2y - y^3 + i2xy^2$$

gilt, definieren wir

$$u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2y - y^3 \quad \text{und} \quad v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2xy^2$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 u(x, y) &= 2xy, \quad \partial_2 u(x, y) = x^2 - 3y^2 \\ \partial_1 v(x, y) &= 2y^2, \quad \partial_2 v(x, y) = 4xy \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sodass insbesondere u und v einmal stetig reell-differenzierbar sind. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Damit ist f genau dann komplex-differenzierbar in $x + iy$, falls dort die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten, d.h.

$$\begin{aligned} \partial_1 u(x, y) = 2xy &= 4xy = \partial_2 v(x, y) \\ \partial_2 u(x, y) = x^2 - 3y^2 &= -2y^2 = -\partial_1 v(x, y). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert

$$x^2 = y^2 \iff x = y \text{ oder } x = -y,$$

sodass aus der ersten Gleichung

$$x^2 = 0 \text{ und } -x^2 = 0$$

folgt, d.h. $x = y = 0$. Damit ist f nur in 0 komplex-differenzierbar und es gilt

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{Im}(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{Im}(h) = 0.$$

(ii) (a) Es gilt

$$f(z) = \frac{5z^2 + 3z}{z^2 + 2z} = \frac{5z + 3}{z + 2}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Damit hat f eine hebbare Definitionslücke in 0 und eine Polstelle 1. Ordnung in -2.

(b) Es gilt

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k-3}$$

sodass der Hauptteil der Laurent-Reihe von f in 0 unendlich viele von Null verschiedenen Glieder hat, d.h. f besitzt in 0 eine wesentliche Singularität.

(c) f ist eine Komposition von holomorphen Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$, sodass f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist und somit keine Singularitäten hat.

Aufgabe 2 **((2+2+2)+1+3=10 Punkte)**

Sei
$$f(z) = \frac{-2}{z^2 - 6z + 8}.$$

(i) Berechnen Sie die Laurentreihenentwicklung von f auf

(a) $A_{0,2}(0)$,

(b) $A_{2,4}(0)$,

(c) $A_{4,\infty}(0)$.

(ii) Berechnen Sie das Residuum von f in allen Singularitäten.

(iii) Berechnen Sie für alle positiven reellen Zahl r mit $r \neq 2$ und $r \neq 4$
$$\int_{\kappa_r(0)} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Lösung. Wir führen zunächst eine Partialbruchzerlegung durch. Es gilt
$$\begin{aligned}\frac{-2}{z^2-6z+8} &= \frac{-2}{(z-2)(z-4)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-4} = \frac{A(z-4)+B(z-2)}{(z-2)(z-4)} \\ &= \frac{z(A+B)-4A-2B}{(z-2)(z-4)},\end{aligned}$$
sodass sich
$$A + B = 0 \text{ und } -2 = -4A - 2B$$
ergibt. Es folgt
$$A = 1 \text{ und } B = -1,$$
sodass
$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-4}$$
für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{2,4\}$ gilt.

Für $|z| < 2$ gilt
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}z^k = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{k+1}}z^k$$
und für $|z| > 2$ gilt
$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}2^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}2^k z^{-(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}z^{-k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty}2^{k-1}z^{-k}.$$

Für $|z| < 4$ gilt

$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{4}} = -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}z^k = \sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{4^{k+1}}z^k$$

und für $|z| > 4$ gilt

$$\frac{1}{z-4} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{4}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}4^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}4^k z^{-(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}4^{k-1}z^{-k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty}4^{k-1}z^{-k}.$$

(i) (a) Sei $z \in A_{0,2}(0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-4} = \sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{2^{k+1}}z^k - \sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{4^{k+1}}z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{4^{k+1}}\right)z^k. \end{aligned}$$

(b) Sei $z \in A_{2,4}(0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-4} = \sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{4^{k+1}}z^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^{k+1}}z^k. \end{aligned}$$

(c) Sei $z \in A_{4,\infty}(0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-4} = \sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}z^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty}4^{k-1}z^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(2^{k-1} - 4^{k-1})z^{-k} = \sum_{k=2}^{\infty}(2^{k-1} - 4^{k-1})z^{-k} \end{aligned}$$

(ii) Da f eine Polstelle 1-ter Ordnung in 2 besitzt, gilt

$$\mathrm{Res}_2(f) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2}\left(1 - \frac{z-2}{z-4}\right) = 1.$$

Da f eine Polstelle 1-ter Ordnung in 4 besitzt, gilt

$$\mathrm{Res}_4(f) = \lim_{z\to 4}(z-4)f(z) = \lim_{z\to 4}\left(\frac{z-4}{z-2} - 1\right) = -1.$$

(iii) Sei r eine positive reelle Zahl mit $r \neq 2$ und $r \neq 4$. Es gilt nach Teil (i) oder (ii)

$$\int_{\kappa_r(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & \text{falls } r \in (0,2), \\ 2\pi i, & \text{falls } r \in (2,4), \\ 0, & \text{falls } r \in (4,\infty). \end{cases}$$

Aufgabe 3 **(4+6=10 Punkte)**

(i) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{\kappa_2(-1)} \frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2(z-3)}\ \mathrm{d}z.$$

(ii) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie (in Abhängigkeit von k) das Residuum an der Stelle 0 von

$$f_k \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{\exp(1/z)}{z^k}.$$

Lösung. (i) Mit

$$f \colon \mathbb{C} \setminus \{3\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{\sin(\pi z)}{z-3}$$

und

$$f'(z) = \frac{\cos(\pi z)\pi(z-3) - \sin(\pi z)}{(z-3)^2}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$ folgt

$$\int_{\kappa_2(-1)} \frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2(z-3)}\ \mathrm{d}z = \int_{\kappa_2(-1)} \frac{f(z)}{(z-(-1))^{1+1}}\ \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1!} f'(-1) = \frac{i\pi^2}{2}.$$

(ii) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$f_k(z) = \frac{\exp(1/z)}{z^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-(n+k)} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} z^{-n}$$

für alle $z \neq 0$. Damit folgt

$$\operatorname{Res}_0(f) = \begin{cases} \frac{1}{(1-k)!}, & \text{falls } k \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$