Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Bernhard Farquhar

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IV b (SoSe 2021)
Blatt 4

Bemerkung

Für $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ definieren wir

$$\kappa_r(z_0)\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{C},\ t \mapsto z_0 + re^{it}.$$

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Sei

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{2i, 3+4i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z-2i} + \frac{1}{z-3-4i}.$$

a) (3) Bestimmen Sie

$$\int_{\kappa_r(0)} f(z)\, \mathrm{d}z$$

für $r \neq 2, 5$.

b) (4) Bestimmen Sie

$$\int_{\gamma} f(z) \mathrm{d}z$$

für

$$\gamma\colon [0,8) \to \mathbb{C},\ t \mapsto \begin{cases} 3 + (t-1)3i, & \text{falls } 0 \le t \le 2, \\ 3i + (3-t)3, & \text{falls } 2 \le t \le 4, \\ -3 + (5-t)3i, & \text{falls } 4 \le t \le 6, \\ -3i + (t-7)3, & \text{falls } 6 \le t < 8. \end{cases}$$

[Hinweis: Skizzieren Sie γ.]

Lösungsvorschlag

a) Wir definieren

$$f_1\colon \mathbb{C}\setminus\{2i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z-2i},$$
$$f_2\colon \mathbb{C}\setminus\{3+4i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z-3-4i},$$

sodass

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

Sei $0<r<2$. Da $f_1|_{B_2(0)}$ holomorph ist, folgt mit dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int\limits_{\kappa_r(0)} f_1(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

Sei $r>2$. Es gilt

$$\int\limits_{\kappa_r(0)} f_1(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i,$$

da $2i \in B_r(0)$.

Sei $0<r<5$. Da $f_2|_{B_5(0)}$ holomorph ist, folgt mit dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int\limits_{\kappa_r(0)} f_2(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

Sei $r>5$. Es gilt

$$\int\limits_{\kappa_r(0)} f_2(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i,$$

da $3+4i \in B_r(0)$.

Insgesamt erhalten wir also

$$\int\limits_{\kappa_r(0)} f(z)\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & \text{für } 0<r<2,\\ 2\pi i, & \text{für } 2<r<5,\\ 4\pi i, & \text{für } r>5. \end{cases}$$

b) Wir definieren

$$\Psi\colon [0,5] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \begin{cases} 3e^{i\pi t}, & \text{falls } 0\le t\le 1,\\ \gamma(6-t) & \text{falls } 1\le t<5, \end{cases}$$
$$\Phi\colon [0,5] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \begin{cases} \gamma(1-t) & \text{falls } 0\le t\le 1\\ \gamma(8-(t-1)) & \text{falls } 1\le t<4\\ -3e^{i\pi(t-4)}, & \text{falls } 4\le t<5. \end{cases}$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\int\limits_{\Psi} f(z)\ \mathrm{d}z = 0, \qquad \int\limits_{\Phi} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\Psi} f(z)\ \mathrm{d}z + \int\limits_{\Phi} f(z)\ \mathrm{d}z \\ &= \int\limits_{\kappa_3(0)} f(z)\ \mathrm{d}z - \int\limits_{\gamma} f(z)\ \mathrm{d}z \end{aligned}$$

sowie

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i.$$

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Berechnen Sie mithilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Integrale:

i) (3) $\int_{\kappa_{1/2}(0)} \frac{\exp(z)}{z^3(1+z)} \mathrm{d}z$,

ii) (2) $\int_{\kappa_2(0)} \frac{\cosh(\pi z)}{z+i} \mathrm{d}z$,

iii) (4) $\int_{\kappa_r(0)} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^m} \mathrm{d}z, a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| < r < |b|, m, n \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag

i) Sei

$$f\colon B_{\frac{3}{4}}(0) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{\exp(z)}{1+z}.$$

Dann ist f holomorph mit

$$f'(z) = \frac{\exp(z)(1+z) - \exp(z)}{(1+z)^2} = \frac{\exp(z)z}{(1+z)^2}$$

und

$$\begin{aligned} f''(z) &= \frac{(\exp(z)z + \exp(z))(1+z)^2 - \exp(z)z\ 2(1+z)}{(1+z)^4} \\ &= \exp(z)\frac{(1+z)^2 - 2z}{(1+z)^3} \\ &= \exp(z)\frac{z^2+1}{(1+z)^3} \end{aligned}$$

für alle $z \in B_{\frac{3}{4}}(0)$. Wir erhalten damit

$$\int\limits_{\kappa_{1/2}(0)} \frac{\exp(z)}{z^3(1+z)} \mathrm{d}z = \int\limits_{\kappa_{1/2}(0)} \frac{f(z)}{z^{2+1}} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = \pi i.$$

ii) Sei
$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \cosh(\pi z).$$
Dann ist f holomorph und es gilt

$$\int\limits_{\kappa_2(0)} \frac{\cosh(\pi z)}{z+i} \mathrm{d}z = \int\limits_{\kappa_2(0)} \frac{f(z)}{(z-(-i))^{0+1}} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{0!} f^{(0)}(-i) = 2\pi i \cosh(-i\pi) = 2\pi i \cos(\pi) = -2\pi i,$$

da $-i \in B_2(0)$.

iii) Sei $|a| < r < |b|$. Für $m \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$f_{m,b}\colon B_{|b|}(0) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{(z-b)^m} = (z-b)^{-m}$$

holomorph mit der $(n-1)$-ten Ableitung

$$f_{m,b}^{(n-1)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!} (z-b)^{-(m+n-1)}$$

für alle $z \in B_{|b|}(0)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\kappa_r(0)} \frac{1}{(z-a)^n (z-b)^m} \mathrm{d}z &= \int\limits_{\kappa_r(0)} \frac{f_{m,b}(z)}{(z-a)^{(n-1)+1}} \mathrm{d}z \\
&= \frac{2\pi i}{(n-1)!} f_{m,b}^{(n-1)}(a) \\
&= \frac{2\pi i}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!} (a-b)^{-(m+n-1)},
\end{aligned}$$

da $a \in B_r(0)$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei f eine in einer offenen Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B_1(0)}$ holomorphe Funktion. Welche (holomorphe) Funktion wird durch

$$z \mapsto \int\limits_{\kappa_1(0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi$$

auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$ dargestellt? (Begründung!)

Lösungsvorschlag

Definiere

$$g\colon \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \int\limits_{\kappa_1(0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi.$$

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$. Dann ist

$$h_z\colon B_1(0) \to \mathbb{C},\ w \mapsto \frac{f(w)}{w - z}$$

eine holomorphe Funktion, sodass mit dem Cauchyschen Integralsatz

$$g(z) = \int\limits_{\kappa_1(0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi = \int\limits_{\kappa_1(0)} h_z(\xi) \mathrm{d}\xi = 0$$

folgt. Also $g \equiv 0$.