Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Bernhard Farquhar

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IV b (SoSe 2021)
Blatt 7

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes $\int_{\kappa_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z$, falls

i) (2) $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{\exp(z)}{z^k},\ k \in \mathbb{N}$,

ii) (2) $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1-z}{z^k},\ k \in \mathbb{N}$,

iii) (2) $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{\cos(z)-1}{z^3}$.

Lösungsvorschlag

i) Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$f(z) = \frac{\exp(z)}{z^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} z^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, sodass wir

$$\mathrm{Res}_0(f) = \frac{1}{(k-1)!}$$

erhalten. Mit dem Residuensatz folgt nun

$$\int_{\kappa_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Res}_0(f) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 0, \\ \frac{2\pi i}{(k-1)!}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii) Es gilt

$$f(z) = \frac{1-z}{z^k} = \frac{1}{z^k} - \frac{1}{z^{k-1}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, sodass wir

$$\mathrm{Res}_0(f) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 1, \\ -1, & \text{falls } k = 2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erhalten. Mit dem Residuensatz folgt nun

$$\int\limits_{\kappa_1(0)} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_0(f) = \begin{cases} 2\pi i, & \text{falls } k = 1, \\ -2\pi i, & \text{falls } k = 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

iii) Es gilt

$$f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{z^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n-3} = \left(-\frac{1}{2}\right) z^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n-3}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sodass wir

$$\operatorname{Res}_0(f) = -\frac{1}{2}$$

erhalten. Mit dem Residuensatz folgt nun

$$\int\limits_{\kappa_1(0)} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_0(f) = -\pi i.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei

$$f(z) = \frac{-2}{z^2 - 6z + 8}.$$

i) Berechnen Sie das Residuum von f in allen Singularitäten.

ii) Berechnen Sie für alle positive reellen Zahl r mit $r \neq 2$ und $r \neq 4$

$$\int\limits_{\kappa_r(0)} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Lösungsvorschlag

Wir führen zunächst eine Partialbruchzerlegung durch. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{-2}{z^2 - 6z + 8} &= \frac{-2}{(z-2)(z-4)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-4} = \frac{A(z-4) + B(z-2)}{(z-2)(z-4)} \\ &= \frac{z(A+B) - 4A - 2B}{(z-2)(z-4)}, \end{aligned}$$

sodass sich

$$A + B = 0 \text{ und } -2 = -4A - 2B$$

ergibt. Es folgt

$$A = 1 \text{ und } B = -1,$$

sodass

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-4}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{2, 4\}$ gilt.

i) Da f eine Polstelle 1-ter Ordnung in 2 besitzt, gilt

$$\operatorname{Res}_2(f) = \lim_{z \to 2} (z-2) f(z) = \lim_{z \to 2} \left(1 - \frac{z-2}{z-4}\right) = 1.$$

Da f eine Polstelle 1-ter Ordnung in 4 besitzt, gilt

$$\operatorname{Res}_4(f) = \lim_{z \to 4} (z-4) f(z) = \lim_{z \to 4} \left(\frac{z-4}{z-2} - 1\right) = -1.$$

ii) Sei r eine positive reelle Zahl mit $r \neq 2$ und $r \neq 4$. Es gilt nach Teil i)

$$\int_{\kappa_r(0)} f(z)\, \mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & \text{falls } r \in (0, 2), \\ 2\pi i, & \text{falls } r \in (2, 4), \\ 0, & \text{falls } r \in (4, \infty). \end{cases}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

i) (1) Bestimmen Sie die Ordnung der Polstelle $z_0 = 0$ für $g \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{\sin(z)}{z^2}$.

ii) (3) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{\kappa_1(0)} \frac{\sin(z)}{z^2}\, \mathrm{d}z.$$

Berechnen Sie das gleiche Kurvenintegral dann mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes.

Lösungsvorschlag

i) Es gilt

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{\sin(z)}{z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n-1} \\ &= 1 \cdot z^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n-1} \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sodass wir eine Polstelle 1-ter Ordnung haben.

ii) Nach Teil i) gilt

$$\mathrm{Res}_0(g) = 1,$$

sodass

$$\int\limits_{\kappa_1(0)} \frac{\sin(z)}{z^2}\ \mathrm{d}z = \int\limits_{\kappa_1(0)} g(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i \,\mathrm{Res}_0(g) = 2\pi i.$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\int\limits_{\kappa_1(0)} \frac{\sin(z)}{z^2}\ \mathrm{d}z = \int\limits_{\kappa_1(0)} \frac{\sin(z)}{(z-0)^{1+1}}\ \mathrm{d}z = 2\pi i \sin'(0) = 2\pi i \cos(0) = 2\pi i.$$