Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Variationsrechnung (SS 2015)
Blatt 11

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass f stetig ist in drei Schritten:

(i) Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial.

(ii) Sei $x_0 \in \Omega$ ein beliebiger Punkt in Ω. Œ sei $x_0 = 0$ und $W = \overbrace{[-1,1] \times \cdots \times [-1,1]}^{n\text{-mal}}$ ein Würfel, der in Ω enthalten ist. Dann ist f beschränkt auf den 2^n Seitenflächen des Würfels. Die größte dieser Schranken sei durch M bezeichnet.

(iii) Sei $(x_k) \subset W$ eine Folge die gegen x_0 konvergiert und $(\lambda_k) \subset (0,1]$ eine Nullfolge positiver reeller Zahlen, sodass $x_k \in \partial(\lambda_k W)$. Dann gilt:

$$|f(x_0) - f(x_k)| \leq \lambda_k (M - f(x_0))$$

und somit $f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x_0)$.

(b) In unendlich-dimensionalen normierten Räumen ist die Aussage in (a) falsch:
Es sei X der Raum $C^1([0,1])$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\varphi\|_\infty := \sup\limits_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|$ und $f : X \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(\varphi) = \varphi'(0)$. Zeigen Sie, dass f konvex, aber nicht stetig ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Betrachten Sie das Variationsproblem

$$F(x) := \int_0^1 \left[x^2(t) + (\dot{x}^2(t) - 1)^2 \right] dt \to \min,$$

$$x(0) = x(1) = 0$$

in $C^1([0,1])$. Zeigen Sie:

(a) Der Integrand ist nicht konvex bezüglich $\dot{x}$.

(b) Das Variationsproblem hat keine Lösung.

Abgabe: Am Montag, den 20. Juli vor der Vorlesung.