Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Variationsrechnung (SS 2015)
Blatt 2

Bitte beachten Sie, dass die durch (*) gekennzeichneten Aufgaben nicht bewertet und korrigiert werden. Sie werden im Tutorium gemeinsam bearbeitet.

Aufgabe 1 (1+1+1+1+1 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion sowie $\alpha \in (0, 1]$ beliebig. Die Funktion u heißt *Hölder-stetig* zum Exponenten α auf $\overline{\Omega}$, falls gilt:

$$|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

mit einer Konstanten $M \in [0, \infty)$. Die Klasse der auf $\overline{\Omega}$ $\alpha-$Hölder-stetigen Funktionen wird üblicherweise mit $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \iff [u]_\alpha := \sup\limits_{x,y \in \overline{\Omega}, x \neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$

(b) Durch
$$\| u \|_\alpha := \| u \|_\infty + [u]_\alpha$$
wird eine Norm auf $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ erklärt, die diesen Raum zu einem Banachraum macht. Warum ist $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ nicht schon bzgl. der Maximumnorm vollständig?

(c) Ist Ω konvex und $u \in C^1(\overline{\Omega})$, so ist $u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$.

(d) Für $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ gilt: $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Gilt dies auch wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ unbeschränkt ist?

(e) Ist Ω zusammenhängend und erfüllt u eine "Hölder-Bedingung"mit $\alpha > 1$, so ist u konstant. Wie sehen jene Funktionen aus, die eine "Hölder-Bedingung"mit $\alpha = 0$ erfüllen?

Aufgabe 2 (*)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-messbar. Zeigen Sie:

(a) Ist $u \in L^\infty(\Omega)$, so ist $||u||_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} ||u||_p$.

(b) Ist $u \in L^p(\Omega)$ für alle $p \in [1, \infty)$ und gibt es eine Konstante $K \in [0, \infty)$ so, dass
$$||u||_p \leq K \text{ für alle } p \in [1, \infty)$$
gilt, so ist $u \in L^\infty(\Omega)$ und $||u||_\infty \leq K$.

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass allgemein nicht $||u||_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} ||u||_p$ gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume, wobei $(Y, ||\cdot||_Y)$ vollständig sei, $X_0 \subset X$ ein dichter Unterraum und $T \in \mathfrak{L}(X_0, Y)$ ein stetiger linearer Operator. Beweisen Sie, dass es dann genau einen Operator $\overline{T} \in \mathfrak{L}(X, Y)$ mit $\overline{T}|_{X_0} = T$ gibt.

Aufgabe 4 (*)

Sei $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und sei $X := (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Vorschrift

$$I(x)(y) := I_x(y) := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \ (x = (x_k), y = (y_k) \in \mathbb{R}^n)$$

eine lineare Abbildung $I : X \to X^*$ erklärt wird.

(b) Zeigen Sie, dass auch

$$||x||^* := ||I_x|| \ (x \in \mathbb{R}^n)$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist, die man die zu $||\cdot||$ duale Norm nennt, und dass durch $I : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||^*) \to X^*$ ein isometrischer Isomorphismus gegeben ist.

(c) Bestimmen Sie für $1 \le p \le \infty$ die duale Norm zu

$$||x||_p := \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty \\ \max\limits_{k=1}^{n} |x_k|, & p = \infty \end{cases}.$$

Hierbei ist $x = (x_k) \in \mathbb{R}^n$.

Abgabe: Montag, den 11. Mai vor der Vorlesung.