Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Variationsrechnung (SS 2015)
Blatt 3

Bitte beachten Sie, dass die durch (*) gekennzeichneten Aufgaben nicht bewertet und korrigiert werden. Sie werden im Tutorium gemeinsam bearbeitet.

Aufgabe 1 (2+1+1+1 Punkte)

Für $0 \leq s < \infty$ werden folgende Mengenfunktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert (mit $A \subset \mathbb{R}^n$):

(i) Für $0 < \delta \leq \infty$ sei

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} A_i}{2}\right)^s : A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i, \operatorname{diam}(A_i) \leq \delta, A_i \subset \mathbb{R}^n \,\forall i \in \mathbb{N}\right\},$$

wobei $\alpha(s) = \begin{cases} \text{Volumen der s-dim. Einheitskugel}, & s \in \mathbb{N} \\ > 0 \text{ beliebig}, & \text{sonst} \end{cases}$.

(ii) $\mathcal{H}^s(A) = \lim\limits_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$.

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{H}^s_\delta$ und $\mathcal{H}^s$ sind Maße auf $\mathbb{R}^n$, $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta$ ist monoton fallend und schließen Sie daraus, dass $\mathcal{H}^s(A)$ existiert. (Das so erhaltene Maß auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man als *s-dimensionales Hausdorffmaß*).

(b) $\mathcal{H}^s(x + A) = \mathcal{H}^s(A)$ für alle $A \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) $\mathcal{H}^0$ ist das Zählmaß, d.h. $\mathcal{H}^0(A) = \#A$, wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ endlich ist, sonst $\mathcal{H}^0(A) = \infty$.

(d) $\mathcal{H}^s \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n$ wenn $s > n$.

Aufgabe 2 (*)

Zeigen Sie: $\mathcal{H}^1$ ist auf $\mathbb{R}$ identisch mit dem 1-dimensionalen Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1$.

Aufgabe 3 (*)

Sei $(X, \| \,.\, \|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass die Gültigkeit der *Parallelogrammgleichung* notwendig und hinreichend dafür ist, dass X ein Prä-Hilbert-Raum ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $M \subset C([-1,1])$ die Menge der Funktionen mit

$$\int\limits_0^1 f(x)dx - \int\limits_{-1}^0 f(x)dx = 1.$$

Dann ist M konvex und abgeschlossen, aber es gibt kein Element in M mit minimaler Norm $\| \, . \, \|_\infty$.

Abgabe: Montag, den 18. Mai vor der Vorlesung.