Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Variationsrechnung (SS 2015)
Blatt 5

Bitte beachten Sie, dass die durch (*) gekennzeichneten Aufgaben nicht bewertet und korrigiert werden. Sie werden im Tutorium gemeinsam bearbeitet.

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie: Ist $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung $v \equiv 0$, so ist u konstant.
Hinweis: Approximieren Sie u durch Glättungen $J_\varepsilon * u$ (siehe Aufgabe 2) und verwenden Sie die Eigenschaften (a)-(c) aus Aufgabe 2.

(b) Es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, mit stetiger schwacher Ableitung v. Zeigen Sie: Dann ist u im klassischen Sinne differenzierbar mit Ableitung v.

Aufgabe 2 (*)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\eta : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine C^∞_0-Funktion mit $\operatorname{spt} \eta \subset \overline{B}_1(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \eta dx = 1$ (vgl. Blatt 1, Aufgabe 3). Für $u \in L^1_{\text{loc}(\Omega)}$ definiert man durch

$$(J_\varepsilon * u)(x) := \int\limits_{\Omega} \eta_\varepsilon(z-x)u(z)dz = \int\limits_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z-x)u(z)dz$$

die *Glättung* von u mit $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$.
$J_\varepsilon * u$ ist definiert auf der inneren Parallelmenge von Ω im Abstand ε:

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \,|\, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $J_\varepsilon * u \in C^\infty_0(\Omega_\varepsilon)$.

(b) Ist $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ und besitzt u eine α-te schwache Ableitung, so gilt:

$$D^\alpha(J_\varepsilon * u) = J_\varepsilon * (D^\alpha u).$$

(c) Ist $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ mit einem $1 \le p \le \infty$, so gilt

$$J_\varepsilon * u \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \ \text{ in } L^p_{\text{loc}}(\Omega).$$

Aufgabe 3 (*)

Seien $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Betrachten Sie die durch

$$u(x,y) := f(x) + g(y) \text{ für f.a. } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

definierte Funktion in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ und zeigen Sie: Obwohl die schwachen Ableitungen von u zu den Multiindizes $\alpha = (1,0)$ und $\beta = (0,1)$ nicht zwangsläufig existieren, gilt:

$$D^{\alpha+\beta} u \equiv 0 \text{ f.ü. auf } \mathbb{R}^2.$$

Insbesondere impliziert die Existenz der m-ten schwachen Ableitung nicht die Existenz aller Ableitungen der Ordnung $\leq m-1$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie für ein $t \in (0,1)$ die Funktion $u_t : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$u_t(x) := \begin{cases} x - t, & \text{wenn } x > t, \\ 0, & \text{wenn } x \leq t. \end{cases}$$

Untersuchen Sie u_t auf schwache Differenzierbarkeit und bestimmen Sie ggf. die schwache Ableitung w_t von u_t. Wird w_t (sofern existent) von der f.ü. existierenden klassischen Ableitung u_t' erzeugt? Besitzt u_t eine zweite schwache Ableitung?

Abgabe: Am Montag, den 1. Juni vor der Vorlesung.